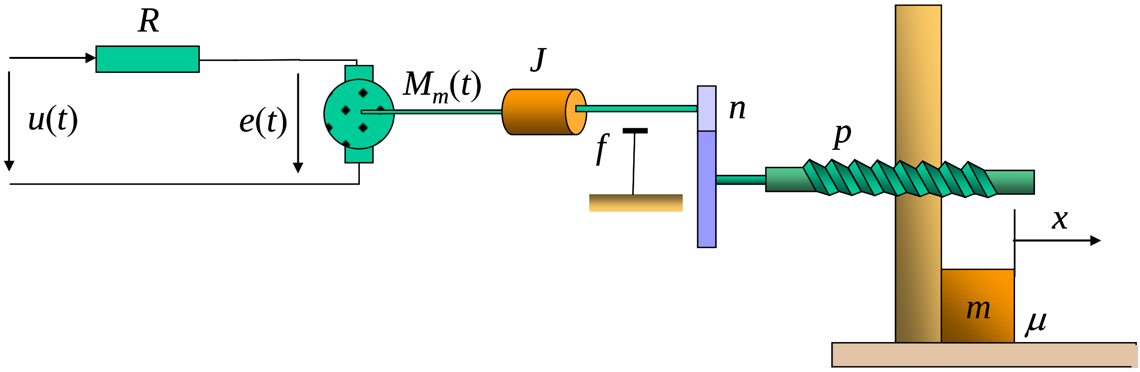
REGULACION AUTOMATICA

Primer parcial

2-2-2009

Ejercicio 1 **(3 puntos)**

La figura representa el mecanismo de empuje de una masa *m*. El sistema es movido mediante un motor de corriente continua controlado por inducido, acoplado a un reductor de relación *n* cuyo eje lento está unido a un husillo encargado de empujar la masa. Sobre la masa se ha de considerar que actúa una fuerza de rozamiento que se opone a su desplazamiento y cuyo coeficiente μ se proporciona a continuación junto al resto de parámetros del sistema.



Los parámetros asociados al sistema son los siguientes:

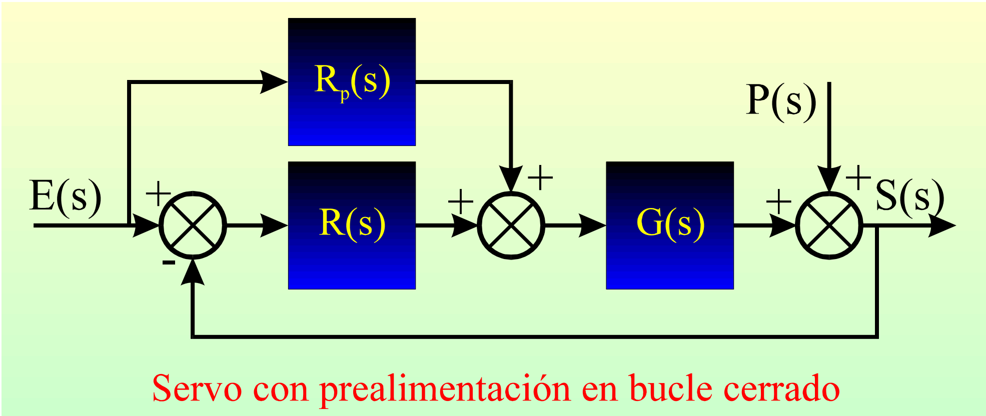
R =1 Ω	Resistencia del inducido del motor.
Kp =0.09 Nw.m/A	Cte de par del motor.
Ke=0.09 V/rad seg^{-1}	Cte eléctrica del motor.
J=1.2*10^{-4} Kg m^2	Inercia del motor.
f=2.18*10^{-4} Nw.m/rad seg^{-1}	Fricción viscosa en el eje del motor.
n=100	Relación de reducción.
p=0.4 m/rad.	Paso del usillo.
m=100 Kg	Masa a empujar.
μ=0.4	Coeficiente de rozamiento dinámico entre la masa *m* y la Superficie de deslizamiento.

Se dispone de una dinamo tacométrica acoplada al eje del motor de ganancia K_ω=0.03 V/(rad/s).

Se pide:

1. Obtener la función de transferencia del sistema en bucle abierto $X(s)/U(s)$ que relaciona la posición *x* de la masa *m* con la tensión *u* aplicada en el inducido del motor.
2. Obtener la función de transferencia del sistema en bucle abierto $X(s)/g(s)$ que relaciona la posición *x* de la masa *m* con la aceleración de la gravedad *g* que actúa como perturbación opuesta al desplazamiento de la masa.
3. Calcular el regulador que permita satisfacer las siguientes especificaciones en el control de velocidad lineal de la masa:
   a. Eliminación de la influencia de la fuerza de rozamiento en régimen permanente.
   b. Tr$\leq$1 s
   c. Error de posición menor de 0.1 m/s.
   d. Sobreoscilación nula.

Ejercicio 2 **(3 puntos)**



La figura representa el control de un sistema cuyo modelo viene dado por $G(s) = \dfrac{3}{s(1+2s)}$. Se pide:

1. Prescindiendo de la prealimentación de consigna, diseña el regulador más sencillo que permita a la salida alcanzar en no más de un segundo a una referencia en escalón unitario, sin sobrepasarla en ningún momento y sin error en régimen permanente.
2. Prescindiendo de nuevo de la prealimentación de consigna, obtén el error de velocidad con el regulador *R(s)* obtenido en el apartado anterior
3. En las mismas circunstancias que en el apartado anterior, ¿cuál sería la expresión en el campo transformado de la acción de control aplicada al sistema (*U(s)*), si la referencia es un escalón de amplitud 3?
4. Supóngase que, utilizando el regulador calculado en el apartado 1, la prealimentación de consigna es de tipo derivativo ($R_p(s) = K_p s$). ¿Cuál es ahora el error de velocidad? ¿Podría llegar a anularse (en caso afirmativo, dígase qué valor debería tener K_p)? ¿Cuál es ahora la expresión de la acción de control en el campo transformado para un escalón de amplitud 3?

Ejercicio 3 **(1.5 puntos)**

Se desea realizar el control del sistema dado por $\dfrac{2}{1+0.5s}$. Calcular empleando como referencia un escalón unitario, y utilizando el esquema de control I-PD con parámetros Ti, Td y K:

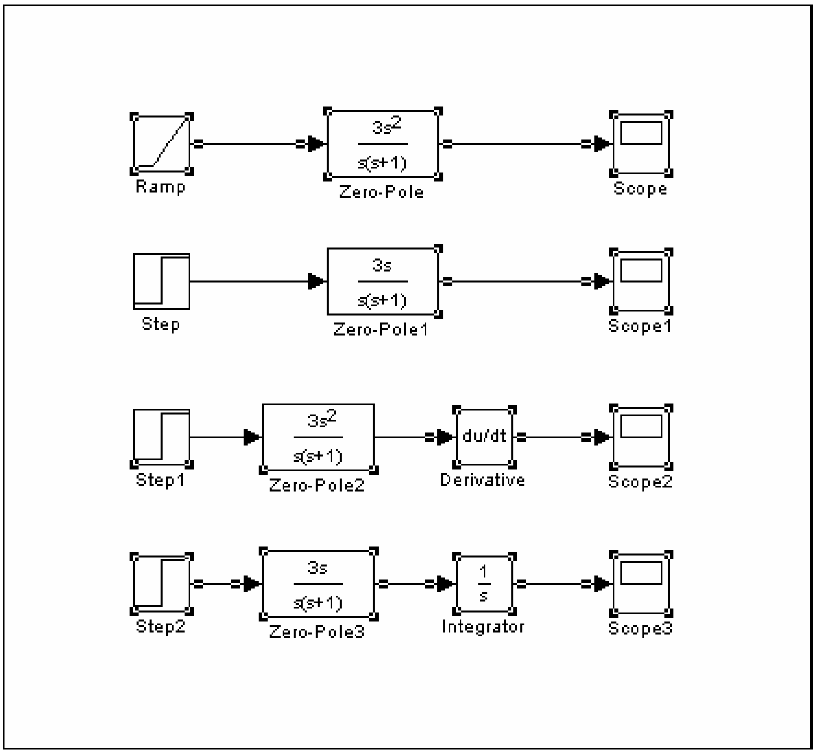
1. La expresión en el dominio de Laplace de las tres componentes de la acción aplicada al sistema. ¿Cuál es el valor de dichas componentes en régimen permanente?
2. Obtén el rango de los parámetros Ti, Td y K que ante una entrada de tipo rampa hacen estable el sistema.

REGULACION AUTOMATICA

Cuestiones Prácticas 1..4 (2.5 puntos)

2-2-2009

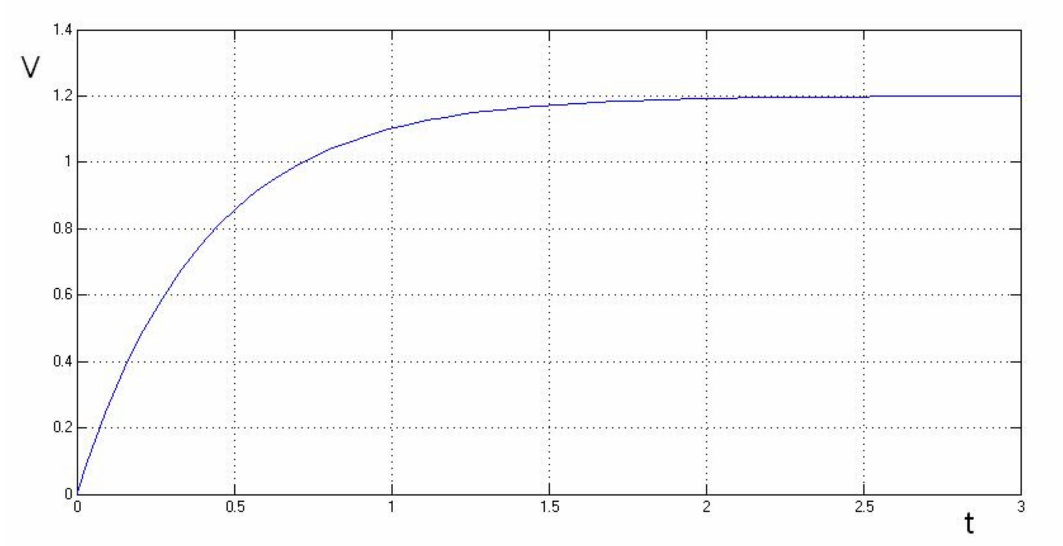
Cuestión 1 **(0.75 puntos)**



Se pretende simular mediante Simulink, el comportamiento de un sistema de función de transferencia $G(s) = \dfrac{3}{s(s+1)}$ ante un impulso unitario. ¿Cuál (o cuáles) de las simulaciones mostradas en la figura anterior se corresponden con lo pretendido? Explica el porqué (supóngase que tanto las rampas como los escalones que aparecen en la figura son unitarios).

Cuestión 2 **(1 punto)**

Se desea realizar un control de posición de un motorreductor de corriente continua controlado por inducido. Para ello se ha procedido previamente a la identificación del sistema sometiendo al inducido del motor a un escalón de tensión de 1 V y obteniendo la gráfica que se muestra a continuación. La salida recogida en la gráfica corresponde a la medida en voltaje proporcionada por una dínamo tacométrica situada en el eje del motor (entrada del reductor) cuya constante K_ω es igual a 0.032 V/rad*s^{-1}. La relación de reducción es 100.

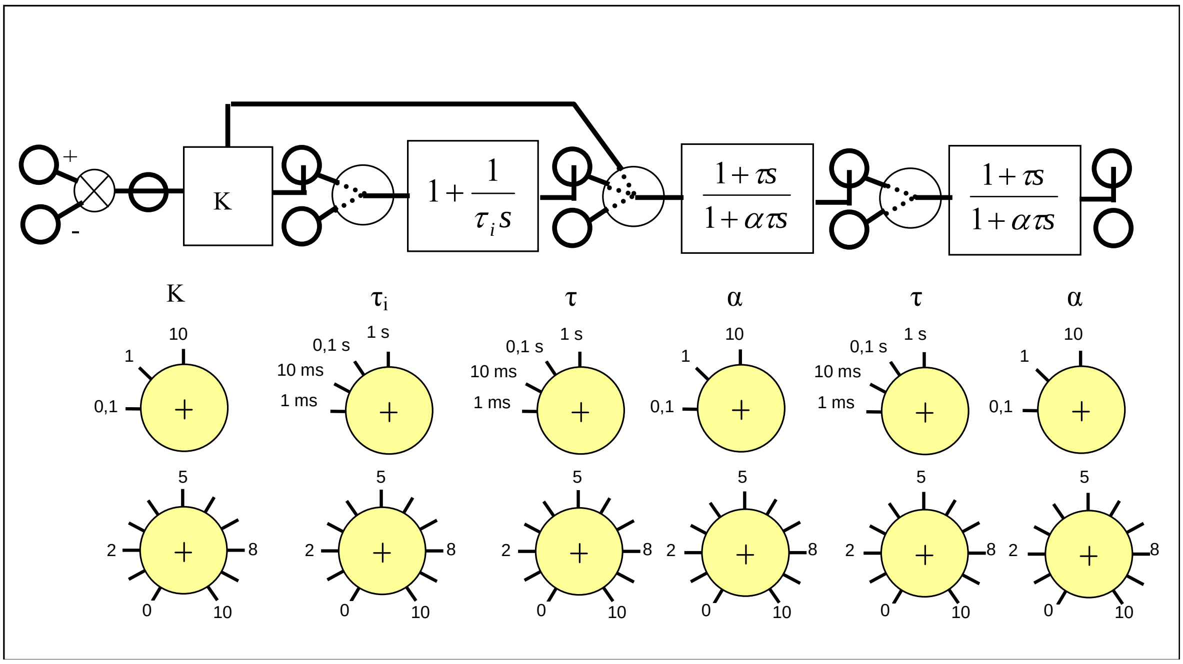


Se pide:

1. Función de transferencia entre la tensión de entrada del inducido y la posición angular del eje de salida del reductor.
2. Para medir la posición angular a la salida del motorreductor se utiliza un potenciómetro situado en dicho eje y de constante K_θ = 2 V/rad. Si le aplicamos una señal de entrada al inducido en forma de escalón de valor 2 V, ¿Cuánto tiempo tardará el motor en girar 1,2 rad desde su posición de inicio? Dibuja la gráfica de la señal de salida vista en el osciloscopio del laboratorio.

Cuestión 3 **(0.75 puntos)**

Sea el siguiente regulador $R(s) = \dfrac{2.4s^2 + 1.4s + 0.2}{s}$.Adapta la notación utilizada en el modelo analítico a la notación existente en la caja de reguladores mostrada a continuación. Sobre el esquema de la caja realiza el ajuste de los conmutadores y potenciómetros.



REGULACION AUTOMATICA

Resolución del Primer parcial

2-2-2009

Ejercicio 1 **(3 puntos)**

Se pide:

1. Obtener la función de transferencia del sistema en bucle abierto $X(s)/U(s)$ que relaciona la posición x de la masa m con la tensión u aplicada en el inducido del motor.

Sobre la masa m actúan las siguientes fuerzas:

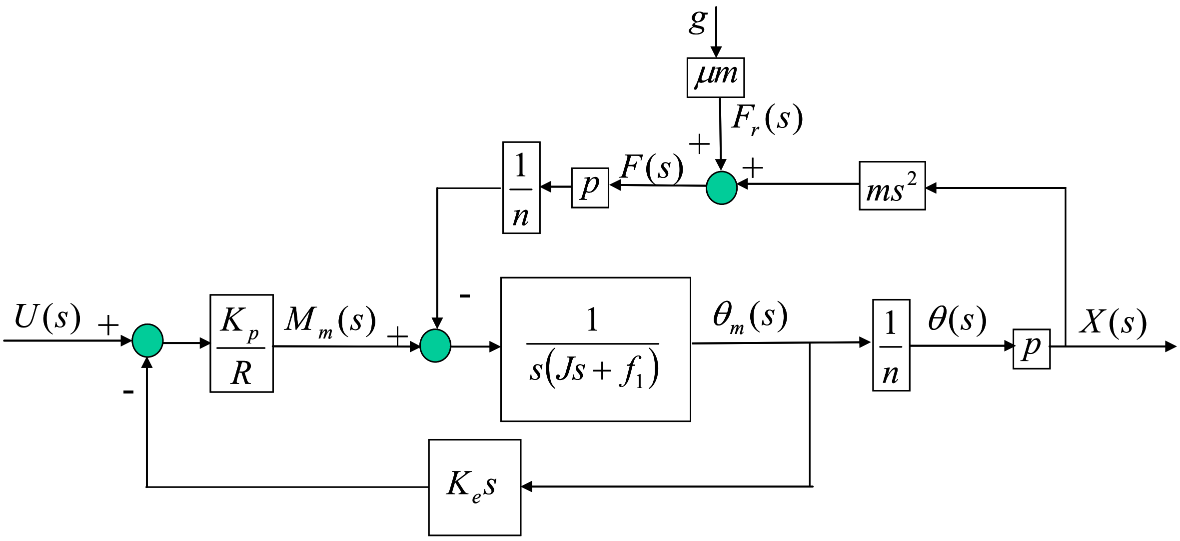
1) En la dirección vertical:

$$N - mg = 0$$

2) En la dirección horizontal hay que contrarrestar la fuerza de rozamiento F_r:

$$F - F_r = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad F - \mu N = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad F = \mu mg + m\frac{d^2x}{dt^2}$$

El diagrama de bloques que relaciona la tensión de inducido con la aceleración de la gravedad y con el desplazamiento x se muestra a continuación:

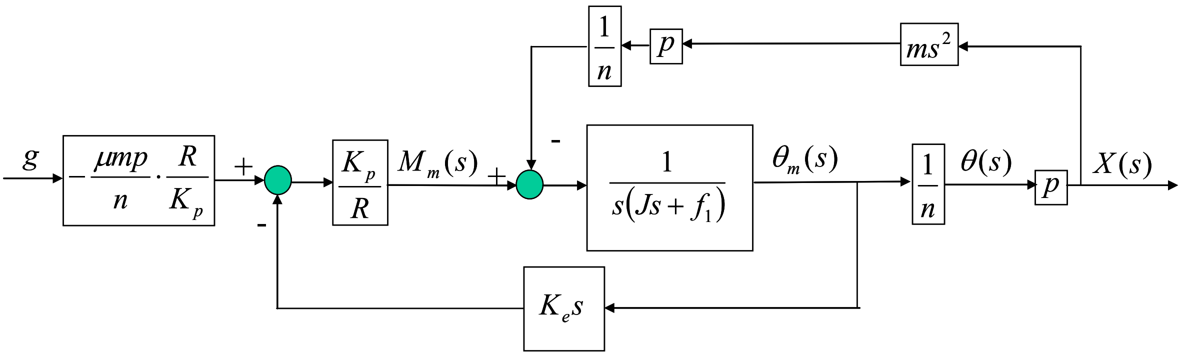


La simplificación del diagrama de bloques, sin tener en cuenta la perturbación g, nos proporciona la primera función de transferencia pedida:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{K_p \cdot p}{n\left(Rf + K_eK_p\right)}}{s\left(\dfrac{R\left(J + \dfrac{mp^2}{n^2}\right)}{Rf + K_eK_p}s + 1\right)} = \frac{0.0433}{s\left(0.2068s + 1\right)}$$

2. Obtener la función de transferencia del sistema en bucle abierto $X(s)/g(s)$ que relaciona la posición x de la masa m con la aceleración de la gravedad g que actúa como perturbación opuesta al desplazamiento de la masa.

Para la segunda función de transferencia pedida se podría volver a resolver el diagrama de bloques, sin tener en cuenta esta vez la entrada $U(s)$ y simplificando el diagrama sin utilizar ningún conocimiento previo. Sin embargo es mucho más sencillo si pasamos la perturbación g al primer sumador, y luego utilizamos la función de transferencia recién calculada. El diagrama de bloques tras pasar la perturbación g al primer sumador es el siguiente:

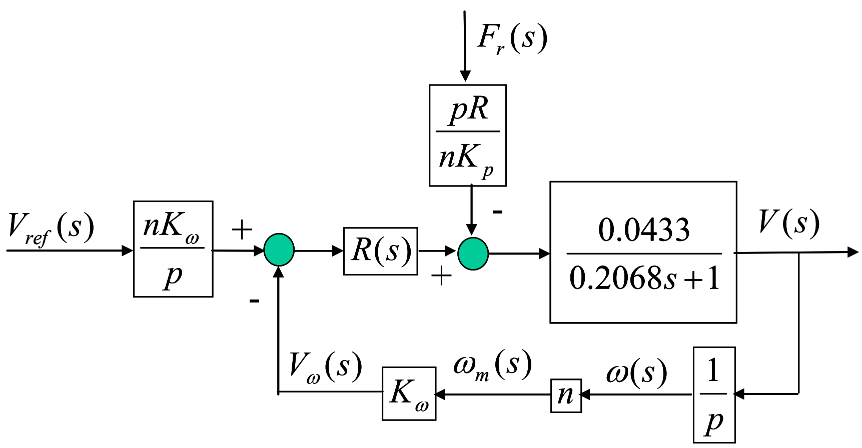


La función de transferencia pedida es:

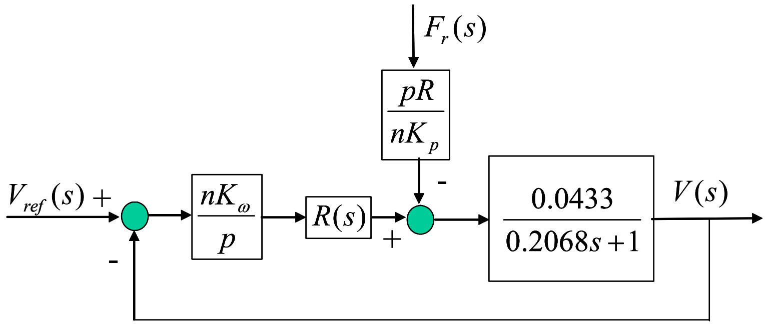
$$\frac{X(s)}{g(s)} = -\frac{\mu mpR}{nK_p}\cdot\frac{X(s)}{U(s)} = -\frac{0.077}{s(0.2068s+1)}$$

3. Calcular el regulador que permita satisfacer las siguientes especificaciones en el control de velocidad lineal de la masa:
    a. Eliminación de la influencia de la fuerza de rozamiento en régimen permanente.
    b. Tr $\leq$ 1 s
    c. Error de posición menor de 0.1 m/s.
    d. Sobreoscilación nula.

El diagrama de bloques correspondiente al esquema de control es el siguiente:



A continuación agrupamos términos para dejar realimentación unitaria:



Para eliminar la influencia de la fuerza de rozamiento F_r en régimen permanente, dado que ésta es de tipo escalón, precisaremos tener un integrador en el regulador $R(s)$. El integrador en el regulador nos proporciona un sistema de tipo 1 en la cadena directa, lo que se traduce en un error de posición nulo, satisfaciendo de esta manera la especificación c. Empezaremos probando con un PI:

$$R(s) = \frac{K_R(0.2068s+1)}{s}$$

La función de transferencia correspondiente al bucle cerrado después de sustituir los valores de los parámetros es un primer orden básico:

$$\frac{V(s)}{V_{ref}(s)} = \frac{1}{\frac{1}{0.325K_R}s+1}$$

Como la sobreoscilación de un sistema de primer orden básico ante una entrada escalón es nula se cumple esta especificación. El valor de K_R lo obtendremos con el ajuste del tiempo de respuesta:

$$Tr = 3 \cdot \frac{1}{0.325K_R} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad K_R \geq 9.2379$$

Un posible regulador que cumple con las especificaciones sería el siguiente:

$$R(s) = \frac{9.25(0.2068s+1)}{s}$$

Ejercicio 2 **(3 puntos)**

2.1.- Las especificaciones, enunciadas en los términos habituales, son:

- *ep = 0*
- *S.O. = 0*
- *Tr <= 1 seg.*

Dado que el sistema incorpora un integrador, la especificación de régimen permanente se cumple con sólo realimentar, así que únicamente habría que explorar los reguladores, proporcional (P) y proporcional-derivativo (PD).

Si probamos en primera instancia con el regulador proporcional, la función de transferencia quedará de la siguiente forma:

$$F(s) = \frac{1.5K_r}{s^2+0.5s+1.5K_r}$$

A la vista está que el producto $\xi\omega_n$ no depende de K_r, y que el mínimo tiempo de respuesta será 2π, por lo que no queda más remedio que elegir un PD que anule el polo en $s = -0.5$

$$R(s) = K_r(1+\tau_d s) = K_r(1+2s)$$
$$\Rightarrow F(s) = \frac{3K_r}{s+3K_r} = \frac{1}{1+\frac{s}{3K_r}}$$

La restricción de tiempo de respuesta se cumplirá con valores de K_r iguales o por encima de la unidad (el valor elegido finalmente), con lo que:

$$\boxed{R(s) = 1+2s}$$

2.2.- Rememorando la definición de e_v…

$$e_v = \lim_{s\to 0}\left(s(1-F(s))\frac{1}{s^2}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s}{s+3}\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{3}$$

Cómo no, también puede utilizarse la fórmula habitual (en función de la constante de velocidad), con idéntico resultado.

2.3.- Una posible forma de obtener la acción *U(s)* para una determinada referencia (en la figura *E(s)*) es…

$$\frac{U(s)}{E(S)} = \frac{S(s)}{E(S)}\frac{U(s)}{S(S)} = \frac{F(s)}{G(S)}$$

Donde *F(s)* y *G(s)* son, respectivamente, la función de transferencia global (con el regulador y en bucle cerrado) y la función de transferencia del sistema a controlar.

$$U(s) = \frac{F(s)}{G(S)}E(s) = \frac{s(1+2s)}{3(1+\frac{s}{3})}\frac{3}{s} = \frac{1+2s}{1+\frac{s}{3}}$$

2.4.- Considerando ahora el bloque de prealimentación, la función de transferencia quedará:

$$F(s) = \left(1+\frac{R_p(s)}{R(s)}\right)\frac{1}{1+\frac{s}{3}} = \left(\frac{1+2s+K_p s}{1+2s}\right)\frac{1}{1+\frac{s}{3}} = \frac{1+2s+K_p s}{(1+2s)(1+\frac{1}{3}s)}$$

Sustituyendo en la expresión utilizada anteriormente para el cálculo de e_v…

$$\boxed{\begin{aligned} e_v &= \lim_{s\to 0}\left(s(1-F(s))\frac{1}{s^2}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1+2s+\frac{1}{3}s+\frac{2}{3}s^2-1-2s-K_p s}{(1+2s)(1+\frac{1}{3}s)s}\right) = \\ &= \lim_{s\to 0}\left(\frac{\frac{1}{3}-K_p+\frac{2}{3}s}{(1+2s)(1+\frac{1}{3}s)}\right) = \frac{1}{3}-K_p \end{aligned}}$$

Obsérvese que <u>se hace cero para $K_p = 1/3$</u>

Comentar que, la aplicación directa de la fórmula que utiliza la constante de velocidad K_v se torna algo más complicada, pues estaríamos obligados a encontrar la topología equivalente que permite aplicar dicha fórmula (un sistema con realimentación unitaria y una única $G_{eq}(s)$ en la cadena directa).

En cuanto a la expresión de la acción, puede procederse del mismo modo que en 2.3:

$$U(s) = \frac{F(s)}{G(S)}E(s) = \frac{s(1+2s+K_p s)}{3(1+\frac{s}{3})}\frac{3}{s} = \frac{1+2s+K_p s}{1+\frac{s}{3}}$$

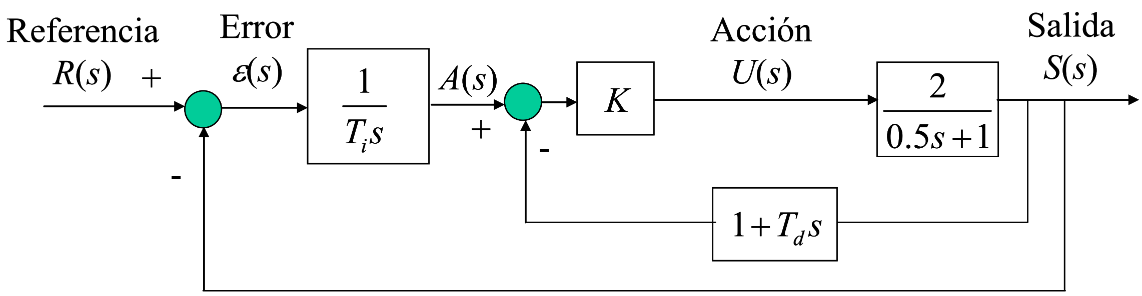
Como comentario adicional, obsérvese que en el instante inicial, la acción se ve incrementada en $3K_p$ respecto de la que se obtenía en ausencia de la prealimentación derivativa.

Ejercicio 3 **(1.5 puntos)**

Se desea realizar el control del sistema dado por $\frac{2}{1+0.5s}$. Calcular empleando como referencia un escalón unitario, y utilizando el esquema de control I-PD con parámetros Ti, Td y K:

1. La expresión en el dominio de Laplace de las tres componentes de la acción aplicada al sistema. ¿Cuál es el valor de dichas componentes en régimen permanente?

El diagrama de bloques correspondiente al esquema de control es el siguiente:



Calcularemos primero la función de transferencia $S(s)/A(s)$:

$$\frac{S(s)}{A(s)} = \frac{2K}{(0.5+2KT_d)s+1+2K}$$

A continuación la función de transferencia en bucle cerrado:

$$\frac{S(s)}{R(s)} = \frac{2K}{T_i(0.5+2KT_d)s^2+(1+2K)T_i s+2K}$$

Ya estamos en disposición de calcular las tres componentes de la acción que nos piden:

$$U_I(s) = KA(s) = K\frac{A(s)}{S(s)}\frac{S(s)}{R(s)}R(s) = K\frac{(0.5+2KT_d)s+1+2K}{T_i(0.5+2KT_d)s^3+(1+2K)T_i s^2+2Ks}$$

$$U_P(s) = -KS(s) = -K\frac{S(s)}{R(s)}R(s) = \frac{-2K^2}{T_i(0.5+2KT_d)s^3+(1+2K)T_i s^2+2Ks}$$

$$U_D(s) = -KT_d sS(s) = -KT_d s\frac{S(s)}{R(s)}R(s) = \frac{-2K^2T_d}{T_i(0.5+2KT_d)s^2 + (1+2K)T_i s + 2K}$$

El valor en régimen permanente se obtiene aplicando el teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} U_I(t) = \lim_{s\to 0} sU_I(s) = \frac{1+2K}{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} U_P(t) = \lim_{s\to 0} sU_P(s) = -K$$

$$\lim_{t\to\infty} U_D(t) = \lim_{s\to 0} sU_D(s) = 0$$

2. Obtén el rango de los parámetros Ti, Td y K que ante una entrada de tipo rampa hacen estable el sistema.

La estabilidad no depende de la señal de entrada, sólo de la función de transferencia de su sistema, y en concreto de las raíces del polinomio del denominador de ésta. El polinomio del denominador es:

$$T_i(0.5+2KT_d)s^2 + (1+2K)T_i s + 2K$$

Para que el sistema sea estable, como es un segundo orden, todos sus coeficientes deberán tener el mismo signo, bien todos positivos o bien todos negativos. Tenemos varios casos:

Si K>0, el término independiente es positivo, luego todos los coeficientes tienen que ser positivos:

$$K>0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} (1+2K)T_i > 0 \quad\Rightarrow\quad T_i > 0 \\ T_i(0.5+2KT_d) > 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad 0.5+2KT_d > 0 \quad\Rightarrow\quad T_d > -\frac{0.25}{K}$$

Si por el contrario K<0 todos los coeficientes deben ser negativos:

$$K<0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} (1+2K)T_i < 0 \\ T_i(0.5+2KT_d) < 0 \end{cases}$$

En este caso hay dos opciones:

1) Si $1+2K>0$:

$$1+2K>0 \quad\Rightarrow\quad K>-0.5 \quad\Rightarrow\quad T_i<0 \quad\Rightarrow\quad 0.5+2KT_d>0 \quad\Rightarrow\quad T_d > -\frac{0.25}{K}$$

2) Si $1+2K<0$

$$1+2K<0 \quad\Rightarrow\quad K<-0.5 \quad\Rightarrow\quad T_i>0 \quad\Rightarrow\quad 0.5+2KT_d<0 \quad\Rightarrow\quad T_d < -\frac{0.25}{K}$$

REGULACION AUTOMATICA

Cuestiones Prácticas 1..4 (2.5 puntos)

2-2-2009

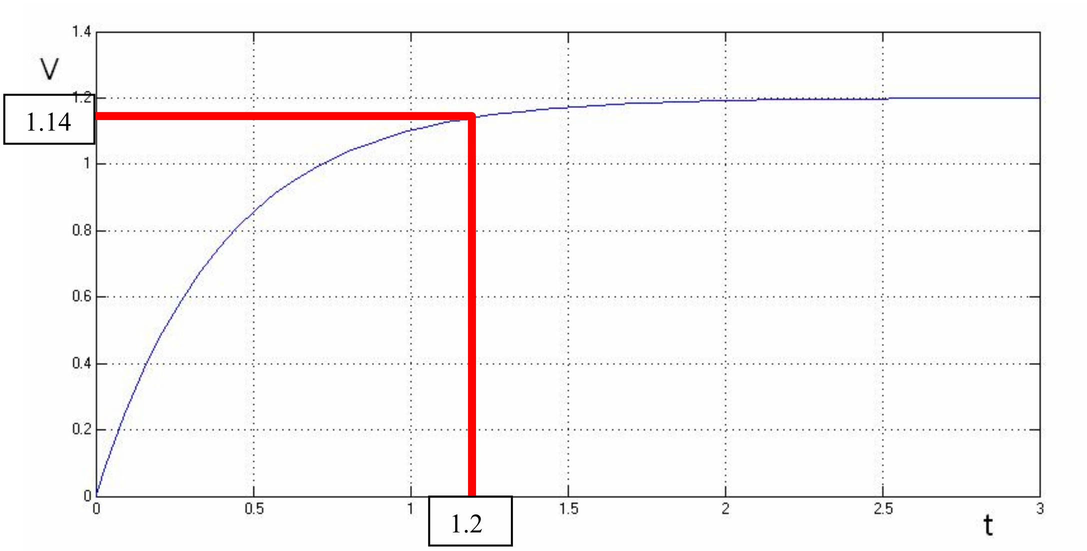
Cuestión 1 **(0.75 puntos)**

Las simulaciones 1 y 2 se corresponden con lo pretendido, pues…

- Simulación 1: $S(s)=\frac{3s^2}{s(s+1)}\frac{1}{s^2}=\frac{3}{s(s+1)}$
- Simulación 2: $S(s)=\frac{3s}{s(s+1)}\frac{1}{s}=\frac{3}{s(s+1)}$

Cuestión 2 **(1 punto)**

Se desea realizar un control de posición de un motorreductor de corriente continua controlado por inducido. Para ello se ha procedido previamente a la identificación del sistema sometiendo al inducido del motor a un escalón de tensión de 1 V y obteniendo la gráfica que se muestra a continuación. La salida recogida en la gráfica corresponde a la medida en voltaje proporcionada por una dínamo tacométrica situada en el eje del motor (entrada del reductor) cuya constante K_ω es igual a 0.032 V/rad*s^{-1}. La relación de reducción es 100.



Se pide:

1. Función de transferencia entre la tensión de entrada del inducido y la posición angular del eje de salida del reductor.

   Para obtener la función de transferencia pedida se recurre a la gráfica y a los datos proporcionados sobre ella. Se observa la respuesta de un sistema de primer orden básico ante una entrada en escalón de tensión de 1 V:

$$V_{sensor}(s)=\frac{1}{s}\frac{V_{sensor}(s)}{U(s)}=\frac{1}{s}\frac{K}{Ts+1}$$

   El valor en régimen permanente es 1,2. Este valor nos permite calcular el valor de la ganancia *K*:

$$\lim_{t\to\infty} V_{sensor}(t)=\lim_{s\to 0} sV_{sensor}(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{K}{Ts+1}=K=1{,}2$$

El 95% de 1,2 es 1,14 y este valor se alcanza para *t=Tr=1,2*. De la fórmula de *Tr* de un sistema de primer orden básico obtendremos el parámetro que nos falta:

$$Tr = 3T = 1{,}2 \Rightarrow T = 0{,}4$$

Finalmente nos queda aplicar la acomodación apropiada e integrar la función de transferencia para obtener como salida de la función la posición angular en el eje de salida de reductor. De modo que la acomodación será la ganancia de la dinamo tacométrica K_w por la relación de reducción n ya que la dínamo se encuentra en el eje de entrada del reductor:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}\frac{1{,}2}{0{,}4s+1}\frac{1}{0{,}032\cdot 100} = \frac{0{,}375}{s(0{,}4s+1)}$$

2. Para medir la posición angular a la salida del motorreductor se utiliza un potenciómetro situado en dicho eje y de constante K_θ = 2 V/rad. Si le aplicamos una señal de entrada al inducido en forma de escalón de valor 2 V, ¿Cuánto tiempo tardará el motor en girar 1,2 rad desde su posición de inicio? Dibuja la gráfica de la señal de salida vista en el osciloscopio del laboratorio.

   Deberemos calcular la salida de ángulo producida por la entrada en escalón de 2 V, a través de la función de transferencia calculada en el apartado anterior:

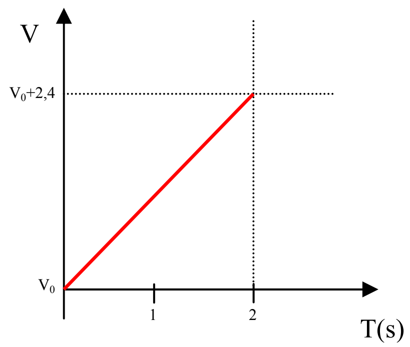
$$\theta(s) = U(s)\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{2}{s}\frac{0{,}375}{s(0{,}4s+1)} = 0{,}75\frac{2{,}5}{s^2(s+2{,}5)}$$

   Para calcular el tiempo, tenemos que aplicar la antitransformada de Laplace para pasar al espacio temporal:

$$\theta(t) = 0{,}75\left(t - \frac{1-e^{-2{,}5t}}{2{,}5}\right) = 1{,}2$$

$$2{,}5t - e^{-2{,}5t} = 5 \Rightarrow t \cong 2seg$$

   La señal que veríamos en el osciloscopio sería la siguiente:



Cuestión 3 **(0.75 puntos)**

Sea el siguiente regulador $R(s) = \frac{2.4s^2 + 1.4s + 0.2}{s}$.Adapta la notación utilizada en el modelo analítico a la notación existente en la caja de reguladores mostrada a continuación. Sobre el esquema de la caja realiza el ajuste de los conmutadores y potenciómetros.

Primero se obtendrán las raíces del polinomio del numerador: s1=-1/3 y s2=-1/4. A continuación se expresa el polinomio del numerador utilizando esas raíces (T1=-1/s1=3 y T2=-1/s2=4) y ajustando su ganancia:

$$R(s) = 0.2\frac{(3s+1)(4s+1)}{s}$$

Finalmente se obtienen 2 posibles soluciones, dependiendo de qué constante de tiempo se elija como T_i:

$$R_1(s) = 3 \cdot 0.2 \left(\frac{s + \frac{1}{3}}{s} \right) (4s+1) = 0.6 \left(1 + \frac{1}{3s} \right) (4s+1)$$

$$R_2(s) = 4 \cdot 0.2 \left(\frac{s + \frac{1}{4}}{s} \right) (3s+1) = 0.8 \left(1 + \frac{1}{4s} \right) (3s+1)$$

Como ejemplo se muestra el esquema de conexionado para el primer regulador: