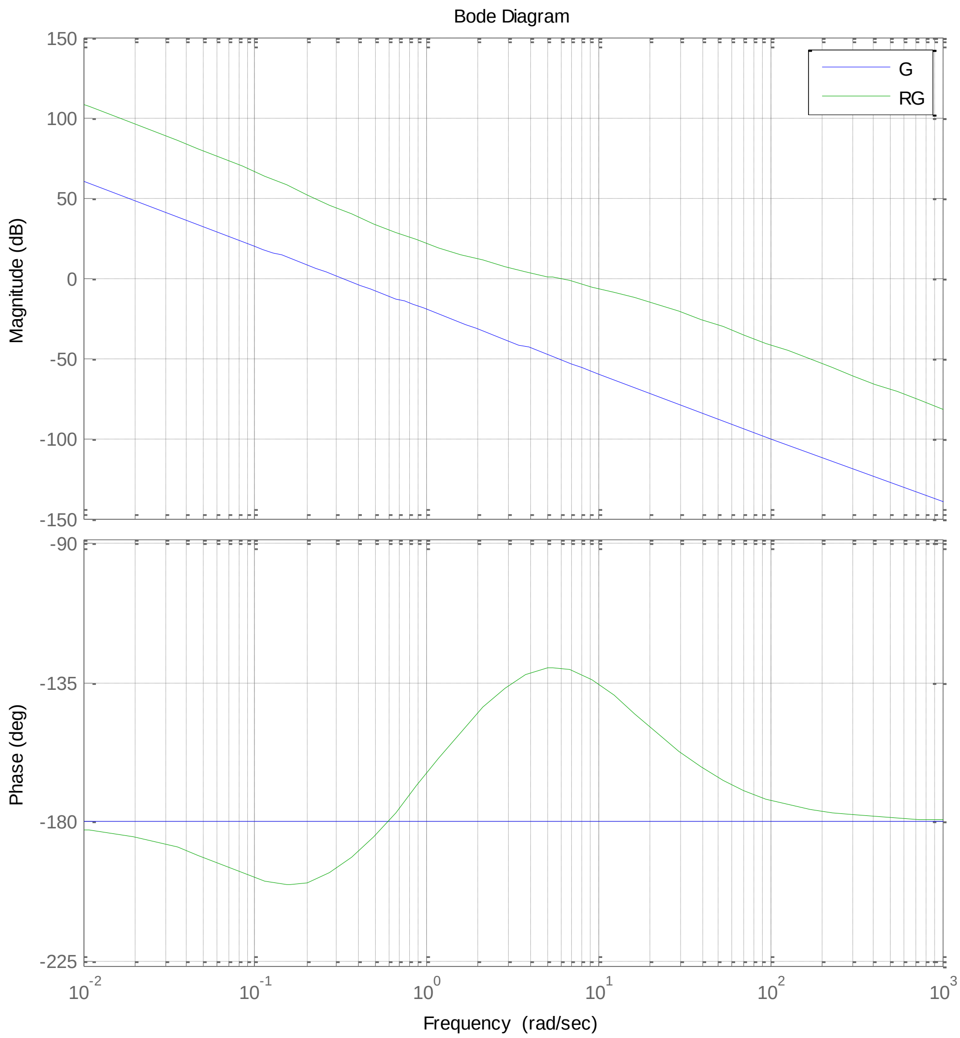
EJERCICIO 1

Los diagramas mostrados en la hoja adjunta representan respectivamente el modelo de un sistema que se pretende controlar y el correspondiente a dicho sistema con el regulador. Se pide:

a) ¿Qué sistema se trata de controlar? 1.- Una fricción viscosa. 2.- Una fricción seca. 3.- Una inercia pura. 4.- Una constante elástica (elígelo razonadamente)
b) ¿Cuál es el valor de la (en su caso): fricción – inercia – constante elástica?
c) ¿Cuál es el comportamiento del sistema controlado con el regulador propuesto?
d) ¿Cuál es la función de transferencia del regulador?



Ejercicio 2. 2º Parcial 6-6-2007

a) Si observamos el diagrama de bode del sistema a controlar identificamos claramente la función de transferencia como un sistema de 2º orden y tipo 2, ya que la fase toma un valor constante de -180º a todas las frecuencias y el módulo presenta una pendiente uniforme de -40 dB/década:

$$G(s) = K\frac{1}{s^2}$$

Esto se corresponde con la función de transferencia de una inercia pura:

$$M(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \rightarrow \frac{\theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{Js^2}$$

Las ecuaciones que modelan el comportamiento del resto de posibilidades son:

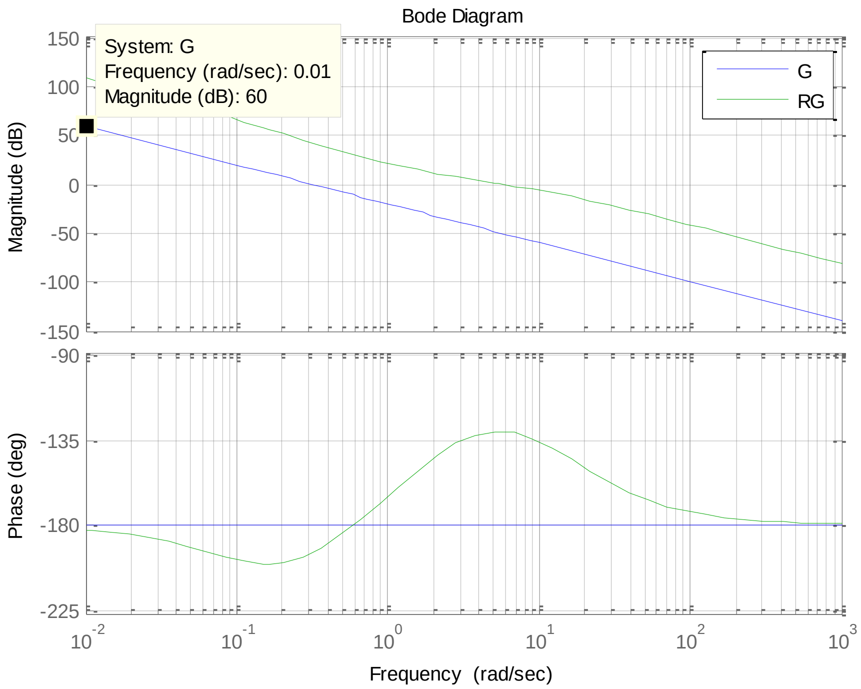
- Fricción viscosa: $f(t) = f\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{fs}$
- Fricción seca: $f(t) = k_f m \rightarrow F(s) = k_f m$
- Constante elástica: $f(t) = k_x y(t) \rightarrow \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{k_x}$

b) Para determinar el valor de la inercia, debemos identificar la ganancia estática del sistema, para lo cual nos fijamos en el módulo a bajas frecuencias:

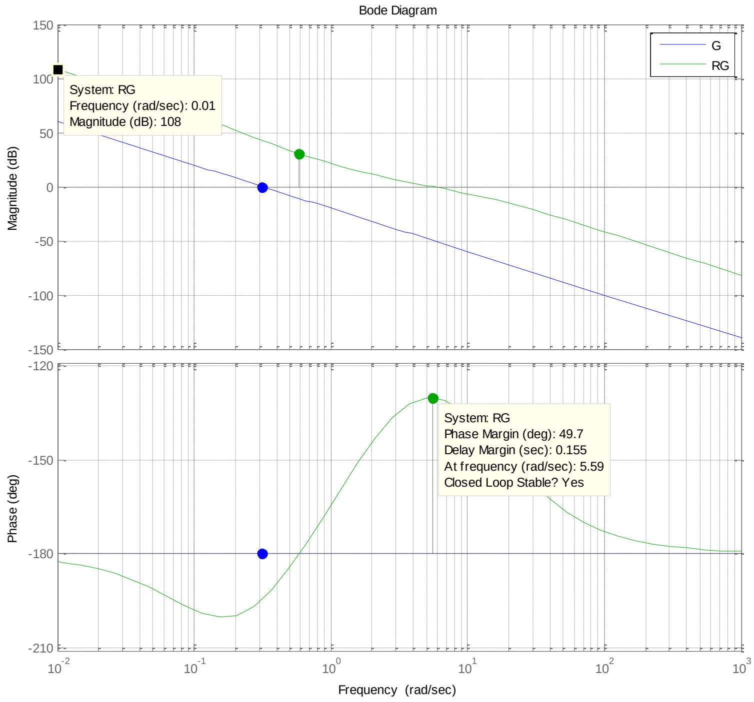
$$20\log G(j\omega) = 20\log K - 40\log\omega_0 = 20\log K - 40\log 0.01 = 20\log K + 80 = 60\text{ dB}$$
$$\rightarrow 20\log \mathrm{K} = 60 - 80 = -20\text{ dB} \rightarrow \mathrm{K} = 10^{-\frac{20}{20}} = 0.1$$

De aquí, el valor de la inercia pura será:

$$G(s) = K\frac{1}{s^2} = \frac{1}{Js^2} \rightarrow J = \frac{1}{K} = \frac{1}{0.1} = 10\text{ Kg}\cdot\text{m}^2$$



c) El comportamiento del sistema controlado lo determinaremos midiendo los parámetros frecuenciales sobre el diagrama del sistema controlado, margen de fase, frecuencia de corte y ganancia estática:

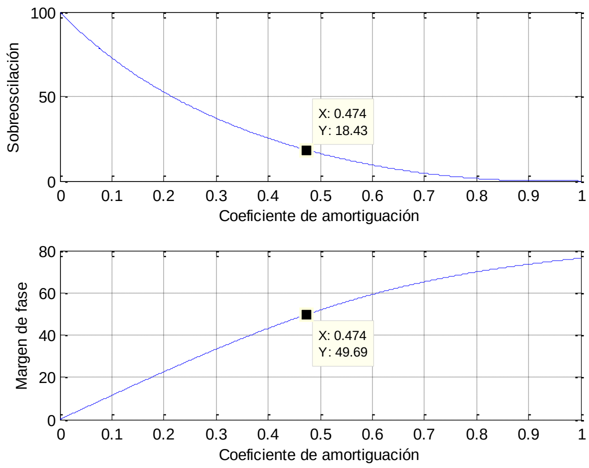


El margen de fase y la frecuencia de corte los medimos directamente en el diagrama de bode:

$$M_f = 49.7º, \qquad \omega_c = 5.59$$

Obviamente, se trata de un sistema estable, como acredita que el margen de fase sea positivo. A partir del margen de fase obtenemos el coeficiente de amortiguación y la sobreoscilación:

$$SO = 18.43\%, \qquad \xi = 0.474$$



Con el coeficiente de amortiguación y la frecuencia de corte, obtenemos el tiempo de respuesta:

$$\frac{\omega_c}{\omega_n} = \sqrt{\sqrt{4\xi^4+1} - 2\xi^2} = 0.8043 \rightarrow \omega_n = \frac{\omega_c}{0.8043} = \frac{5.59}{0.8043} = 6.9498$$

$$t_r = \frac{\pi}{\xi\omega_n} = 0.9538 \approx 1 \text{ seg}$$

Para la ganancia estática, comprobamos el módulo a bajas frecuencias:

$$20\log G(j\omega) = 20\log K_{est} - 40\log\omega_0 = 20\log K_{est} - 40\log 0.01 = 20\log K_{est} + 80$$
$$= 108 \text{ dB} \rightarrow 20\log \text{K} = 108 - 80 = 28 \text{ dB} \rightarrow \text{K} = 10^{\frac{28}{20}} = 25.11$$

Al ser un sistema de tipo 2, tanto el error de posición como el error de velocidad son nulos. En cuanto al error de aceleración:

$$e_a = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{25.11} = 0.0398$$

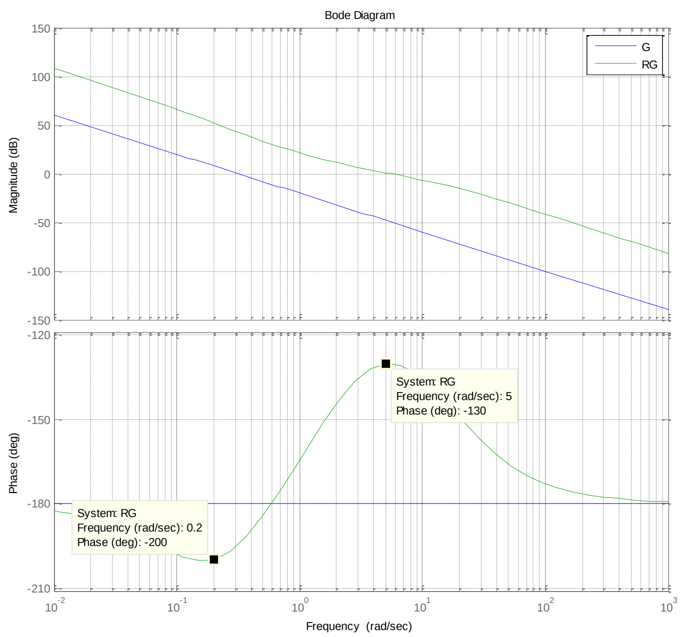
d) En el diagrama de fases se aprecia una clara disminución de la fase en torno a 0.2 rad/seg, y un incremento de la fase en torno a la frecuencia de corte, por lo que el regulador se trata sin duda de un PAF+RF:

$$R(s) = K_r \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\frac{1+\alpha'\tau' s}{1+\tau' s}$$

A partir del valor de la ganancia estática identificada en el apartado anterior y de la inercia pura identificada en el apartado b, deducimos que la ganancia del regulador debe ser:

$$K_{est} = K_r K = \frac{K_r}{J} \rightarrow K_r = K_{est}J = 251.1$$

Para determinar el resto de parámetros del regulador, medimos los aportes de fase del PAF y del RF:



La fase del sistema a controlar es -180º constante a todas las frecuencias, por lo que el aporte de cada uno de los componentes del regulador es:

$$\phi_{max} = 180 - 130 = 50º, \qquad \phi'_{max} = 200 - 180 = 20º$$

A partir del aporte de fase, podemos calcular los parámetros α y α' del regulador:

$$\alpha = \frac{1 - \sin\phi_{max}}{1 + \sin\phi_{max}} = 0.1325, \qquad \alpha' = \frac{1 - \sin\phi'_{max}}{1 + \sin\phi'_{max}} = 0.4903$$

Para las constantes de tiempo, identificamos las frecuencias a las que se producen los máximos aportes de fase:

$$\omega_{max} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} = 5 \rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_{max}\sqrt{\alpha}} = 0.5495$$

$$\omega'_{max} = \frac{1}{\tau'\sqrt{\alpha'}} = 0.2 \rightarrow \tau' = \frac{1}{\omega'_{max}\sqrt{\alpha'}} = 7.1407$$

El regulador finalmente será:

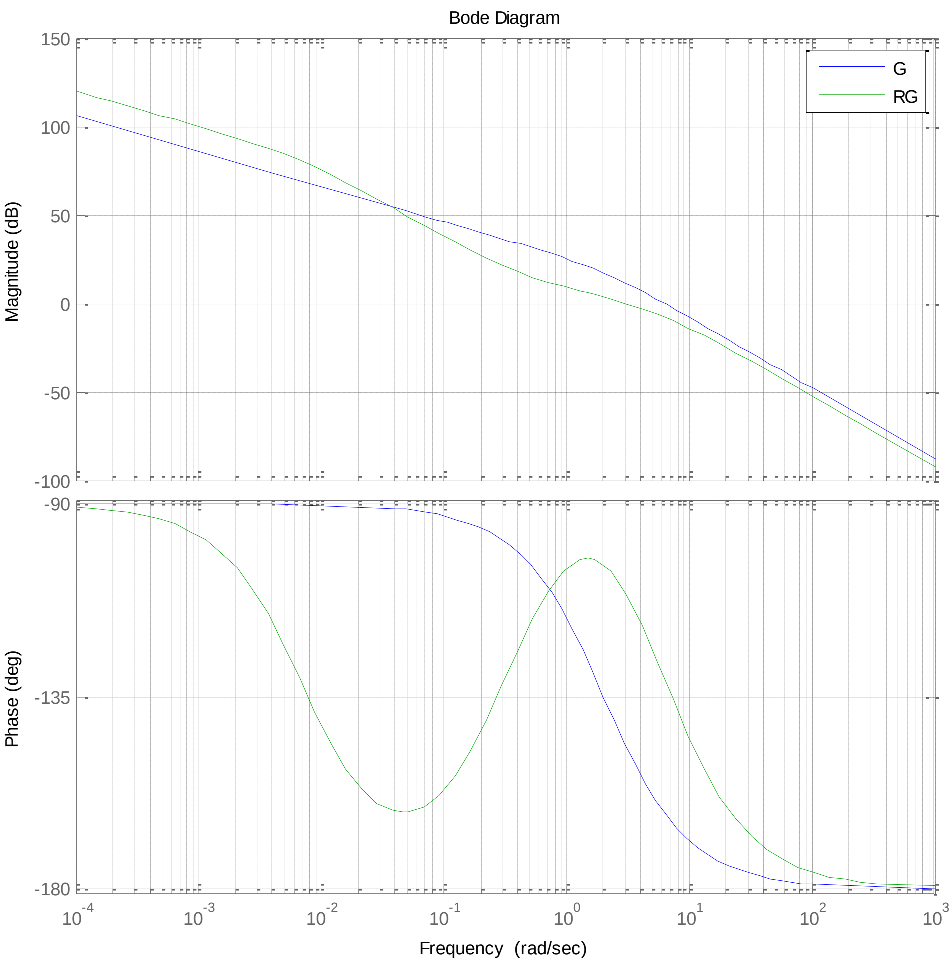
$$R(s) = 251.1\frac{1 + 0.5495s}{1 + 0.0728s}\frac{1 + 3.1854s}{1 + 7.1407s}$$

La identificación de los parámetros dará en realidad un sistema aproximado, ya que estos se han calculado considerando su efecto en el sistema de manera aislada, y en el caso de las frecuencias de máximo aporte de fase, se han tomado también valores aproximados, lo cual hará que una elección diferente conduzca a parámetros identificados diferentes. En cualquier caso, los métodos gráficos no dejan de ser métodos aproximados, por lo que los resultados no variarán mucho de una identificación a otra.

EJERCICIO 2

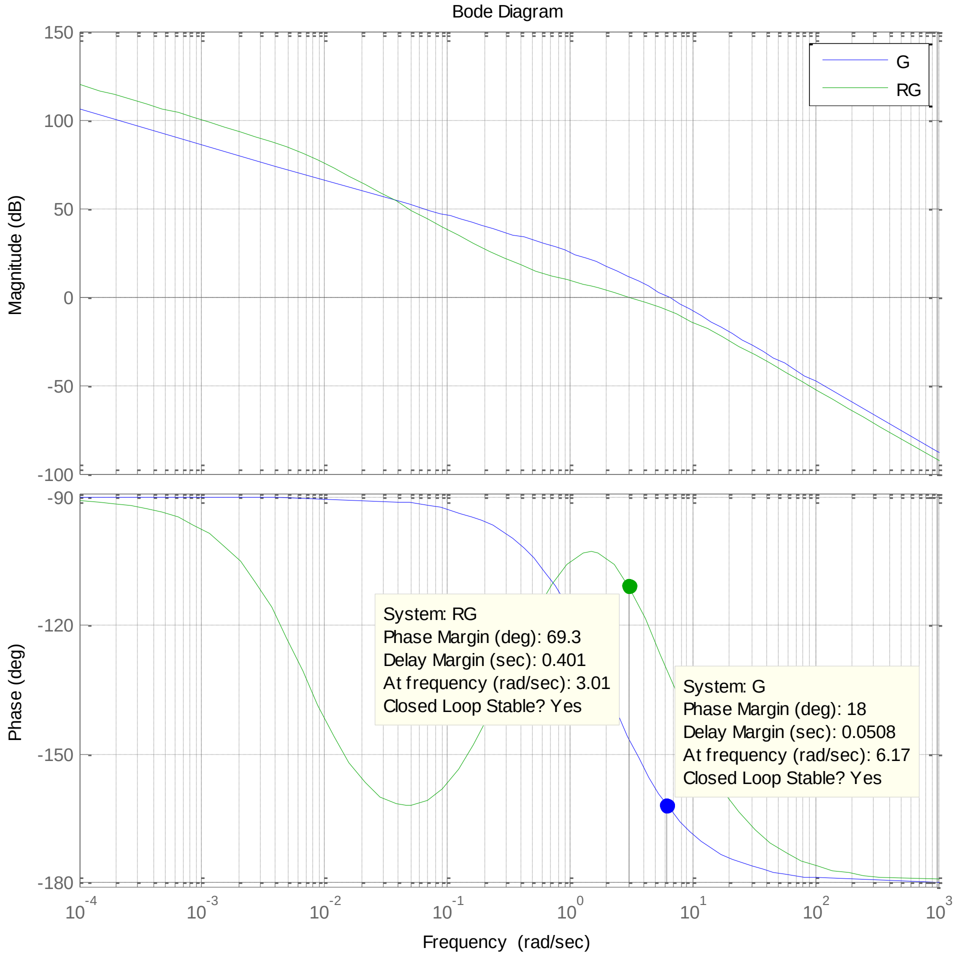
Los diagramas mostrados en la hoja adjunta representan respectivamente el modelo de un sistema que se pretende controlar y el correspondiente a dicho sistema con el regulador. Se pide:

a) Señalar en la gráfica el margen de fase para las dos situaciones representadas
b) Identifica el sistema que se trata de controlar
c) ¿Cuál es la estructura del regulador introducido? Justifica la respuesta
d) ¿Cuál es el comportamiento del sistema controlado (controlador + sistema a controlar, todo ello en bucle cerrado)?



Ejercicio 4. 2º Parcial Septiembre 2006

a) Para obtener el margen de fase, identificamos la frecuencia de corte en ambos diagramas. Para el sistema a controlar, el cruce de la curva de módulos por cero se produce en torno a la frecuencia $\omega_c = 6$, mientras que para el sistema controlado se produce a la frecuencia $\omega_c = 3$. Los márgenes de fase del sistema a controlar y el sistema controlado son 18º y 70º respectivamente.



b) Del diagrama de fases del sistema que se pretende controlar vemos que la fase comienza en -90º y termina en -180º, por lo que podemos decir el sistema tiene dos polos más que ceros y que tiene un polo en el origen, lo cual también se corrobora con la pendiente de -20 dB/década que presenta la curva de módulos a bajas frecuencias. Sólo se aprecia un cambio de pendiente en la curva de módulos, y no hay incremento de la fase a ninguna frecuencia, por lo que tampoco hay ceros. Así pues, se trata de un sistema de segundo orden y tipo 1:

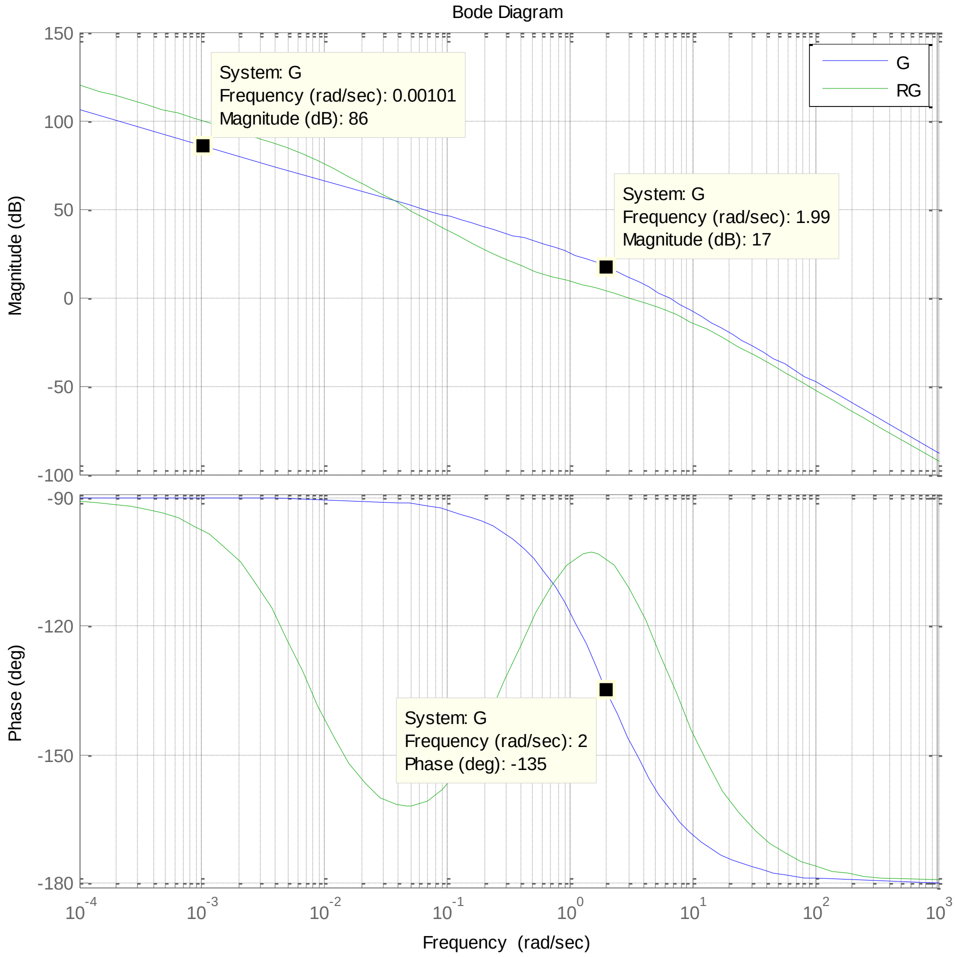
$$G(s) = \frac{K}{s(1+\tau s)}$$

El cambio de pendiente en la curva de módulos se produce en torno a la frecuencia de transición $\omega_t = 2$ radianes por segundo, que también podemos comprobar viendo que la fase a esa frecuencia vale exactamente -135º. Por lo tanto, la constante de tiempo será:

$$\omega_t = \frac{1}{\tau} \rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_t} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Para la ganancia estática, nos fijamos en el valor del módulo a bajas frecuencias:

$$20\log G(j\omega_0) = 20\log K_{est} - 20\log\omega_0 = 20\log K_{est} - 20\log 0.001 = 20\log K_{est} + 60$$
$$= 86\text{ dB} \rightarrow 20\log \mathrm{K} = 86 - 60 = 26\text{ dB} \rightarrow \mathrm{K} = 10^{\frac{26}{20}} = 19.95 \approx 20$$



Por lo tanto, la función de transferencia del sistema a controlar será:

$$G(s) = \frac{20}{s(1 + 0.5s)}$$

c) Para determinar la estructura del regulador introducido, nos fijamos sobre todo en la fase del sistema controlado.

- La fase del sistema tanto a bajas como a altas frecuencias no cambia, al igual que ocurre con las pendientes de la curva de módulos, por lo que el regulador introducido tiene el mismo número de polos que de ceros.
- En una zona se aprecia una clara disminución de la fase respecto a la fase del sistema original, que luego se recupera. Esto nos indica la presencia de un Retraso de Fase.
- En otra zona, se aprecia un incremento moderado de la fase respecto a la fase del sistema original, que también se compensa a frecuencias más altas. Esto nos indica la presencia de un Avance de Fase.

- El módulo del sistema controlado a bajas frecuencias es diferente (mayor) al del sistema a controlar, por lo que también hay una componente proporcional que aumenta la ganancia estática del sistema

Por todo esto, deducimos que el regulador implementado es un PAF+RF:

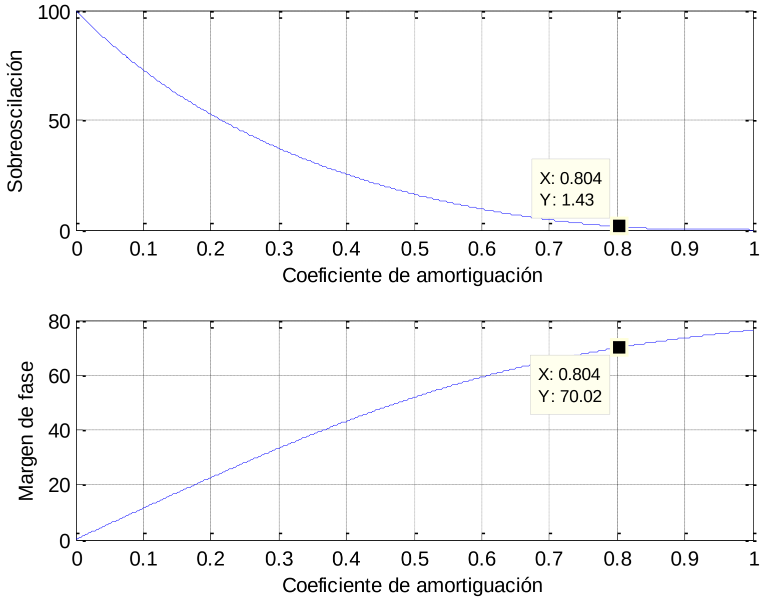
$$R(s) = K_r \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} \frac{1+\alpha'\tau' s}{1+\tau' s}$$

d) Respecto a la respuesta del sistema controlado, hemos identificado la frecuencia de corte y el margen de fase:

$$\omega_c = 3, \qquad M_f = 70º$$

Es evidente que se trata de un sistema estable, pues el margen de fase es positivo. En cuanto a la respuesta transitoria, el margen de fase nos determina el coeficiente de amortiguación y la sobreoscilación del sistema:

$$M_f = 70º \rightarrow \xi = 0.84 \rightarrow SO = 1.43\%$$



Con el coeficiente de amortiguación y la frecuencia de corte, obtenemos el tiempo de respuesta:

$$\frac{\omega_c}{\omega_n} = \sqrt{\sqrt{4\xi^4+1} - 2\xi^2} = 0.5845 \rightarrow \omega_n = \frac{\omega_c}{0.5845} = \frac{3}{0.5845} = 5.1328$$

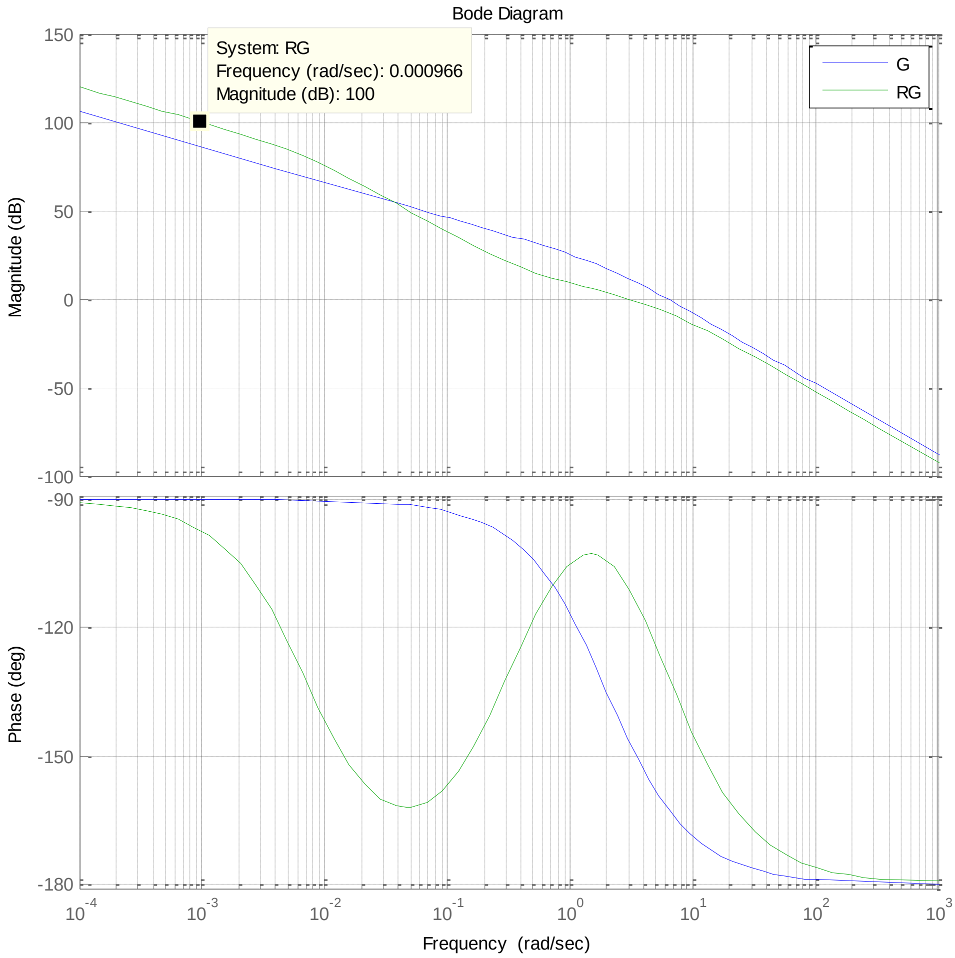
$$t_r = \frac{\pi}{\xi\omega_n} = 0.7613 \text{ seg}$$

Respecto a la respuesta en régimen permanente, nos fijamos en el módulo a bajas frecuencias para determinar la ganancia estática:

$$\begin{aligned} 20\log G(j\omega_0) &= 20\log K_{est} - 20\log \omega_0 = 20\log K_{est} - 20\log 0.001 = 20\log K_{est} + 60 \\ &= 100 \text{ dB} \rightarrow 20\log \mathrm{K_{est}} = 100 - 60 = 40 \text{ dB} \rightarrow \mathrm{K_{est}} = 10^{\frac{40}{20}} = 100 \end{aligned}$$

Al ser un sistema de tipo 1, el error de posición será nulo, y el error de aceleración infinito. En cuanto al error de velocidad:

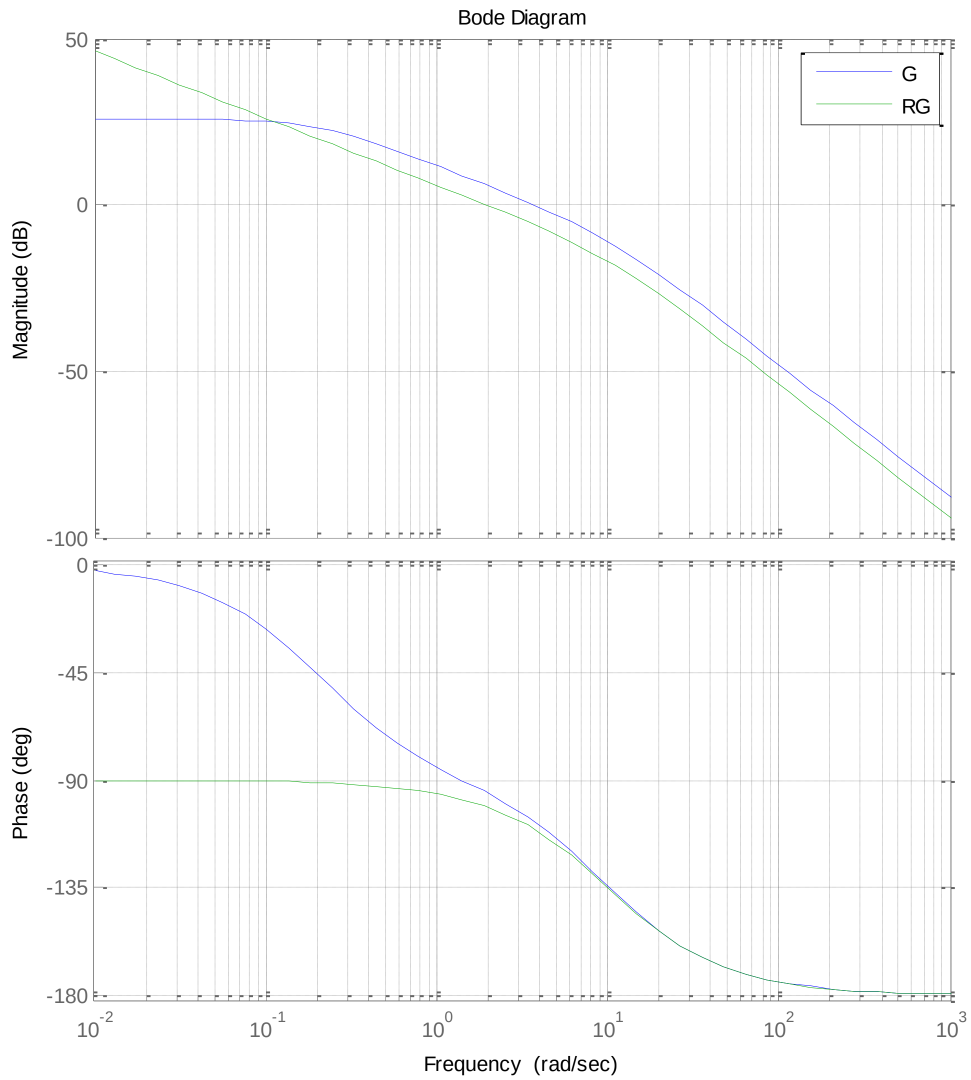
$$e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{100} = 0.01$$



EJERCICIO 3

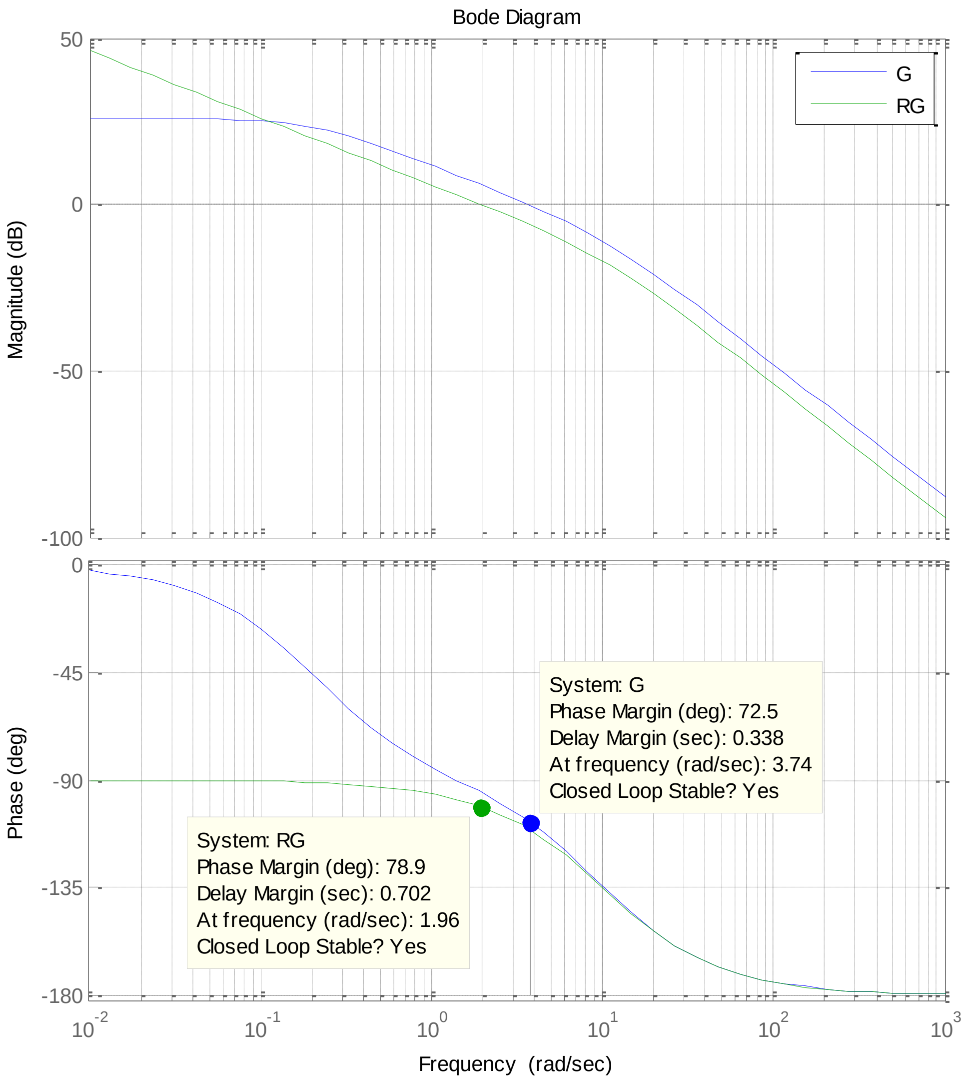
Los diagramas mostrados en la hoja adjunta representan respectivamente el modelo de un sistema que se pretende controlar y el correspondiente a dicho sistema con el regulador. Se pide:

a) Señalar en la gráfica el margen de fase para las dos situaciones representadas
b) Identifica el sistema que se trata de controlar
c) ¿Cuál es la función de transferencia del regulador introducido? Justifica la respuesta
d) ¿Cuál es el comportamiento del sistema a controlar cuando se cierra su bucle de realimentación?
e) ¿Cuál es el comportamiento del sistema controlado (controlador + sistema a controlar, todo ello en bucle cerrado)?



Ejercicio 1. Examen Final Junio 16-6-2006

a) Para obtener el margen de fase, identificamos la frecuencia de corte en ambos diagramas. Para el sistema a controlar, el cruce de la curva de módulos por cero se produce en torno a la frecuencia $\omega_c = 4$, mientras que para el sistema controlado se produce a la frecuencia $\omega_c = 2$. Los márgenes de fase del sistema a controlar y el sistema controlado son 72.5º y 78.9º respectivamente.



b) Del diagrama de fases del sistema que se pretende controlar vemos que la fase comienza en 0º y termina en -180º, por lo que podemos decir el sistema tiene dos polos más que ceros y que no tiene ningún polo en el origen, lo cual también se corrobora con la pendiente de 0 dB/década que presenta la curva de módulos a bajas frecuencias. Solo se aprecian dos cambios de pendiente en la curva de módulos, y no hay incremento de la fase a ninguna frecuencia, por lo que tampoco hay ceros. Así pues, se trata de un sistema de segundo orden y tipo 0:

$$G(s) = \frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$$

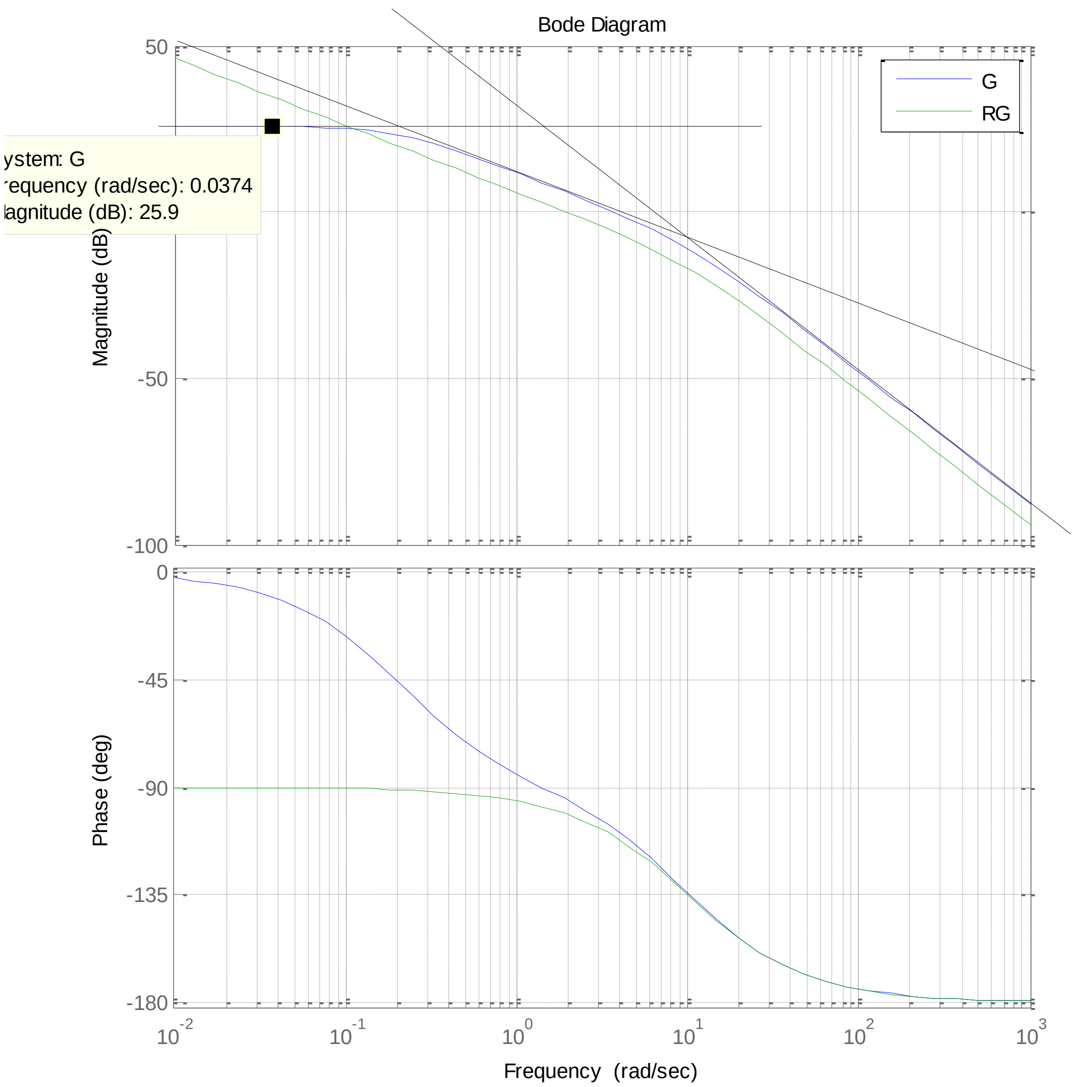
El primer cambio de pendiente en la curva de módulos se produce en torno a la frecuencia de transición $\omega_t = 0.2$ radianes por segundo, y el segundo se produce en torno a $\omega_t = 10$ radianes por segundo, por lo que las constantes de tiempo serán:

$$\omega_{t1} = \frac{1}{\tau_1} \rightarrow \tau_1 = \frac{1}{\omega_{t1}} = \frac{1}{0.2} = 5$$

$$\omega_{t2} = \frac{1}{\tau_2} \rightarrow \tau_2 = \frac{1}{\omega_{t2}} = \frac{1}{10} = 0.1$$

Respecto a la ganancia estática, si nos fijamos en el módulo a bajas frecuencias:

$$20 \log G(j\omega_0) = 20 \log K_{est} = 26 \text{ dB} \rightarrow \mathrm{K_{est}} = 10^{\frac{26}{20}} = 19.95 \approx 20$$

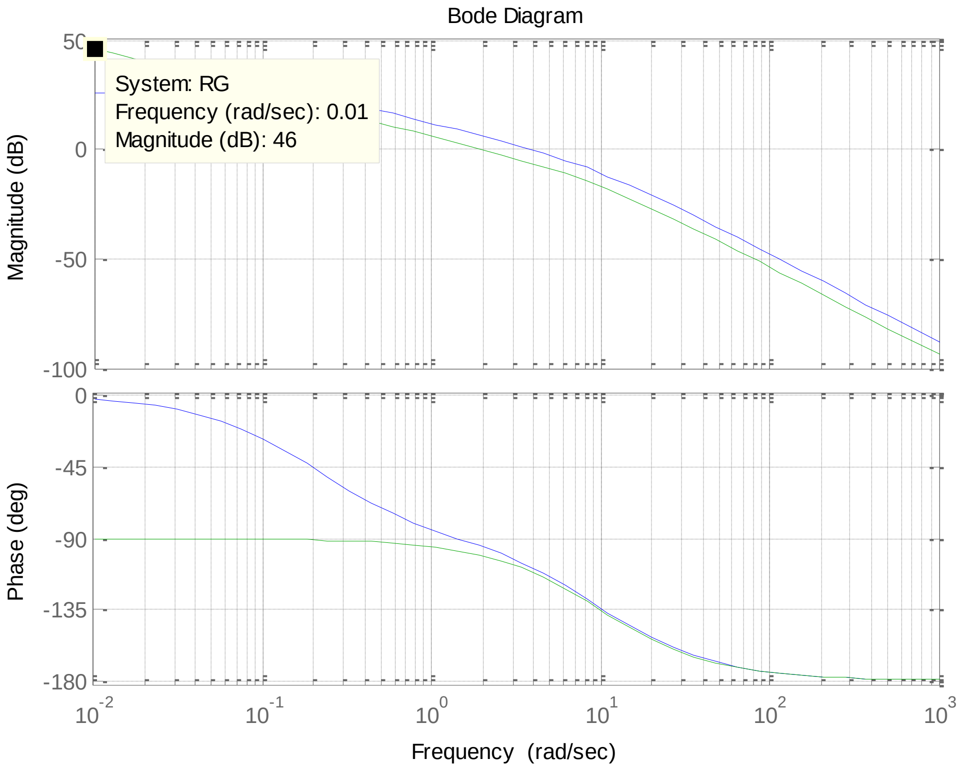


c) El regulador introducido vemos que hace que la fase comience a -90º, sin modificar la fase a altas frecuencias, a la vez que hace que la pendiente a bajas frecuencias pase a ser de -20 dB/década. Evidentemente se trata de un PI, cuya constante de tiempo se ajusta a la constante de tiempo más lenta del sistema a controlar, lo cual podemos comprobar también viendo que el cambio de pendiente que se producía a la primera transición ha desaparecido, y el único cambio de pendiente en el sistema controlado se produce a la segunda frecuencia de transición:

$$R(s) = K_r \frac{1 + \tau_i s}{s} = K_r \frac{1 + 5s}{s}$$

En cuanto a la ganancia del regulador, nos fijamos en el valor del módulo a bajas frecuencias:

$$\begin{aligned} 20 \log G(j\omega_0) &= 20 \log K_{est} + 20 \log K_r - 20 \log \omega_0 = 20 \log 20 + 20 \log K_r - 20 \log 0.01 \\ &= 26 + 20 \log K_r + 40 = 46 \text{ dB} \rightarrow 20 \log K_r = 46 - 40 - 26 = -20 \text{ dB} \\ &\rightarrow K_r = 10^{-\frac{20}{20}} = 0.1 \end{aligned}$$

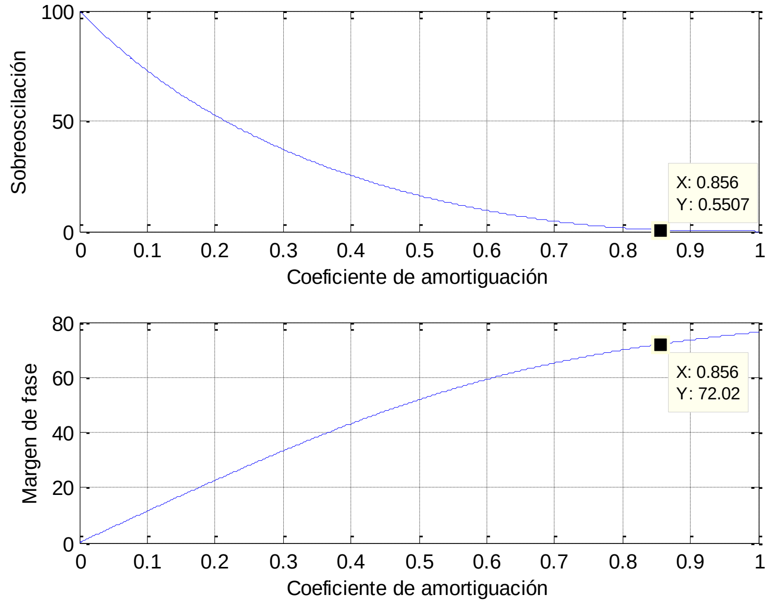


d) La respuesta del sistema a controlar cerrando el bucle de realimentación vendrá caracterizada por el margen de fase y frecuencia de corte para la respuesta transitoria, y por la ganancia estática para la respuesta en régimen permanente.

$$\omega_c = 4, \qquad M_f = 72º, \qquad K_{est} = 20$$

El margen de fase es positivo, por lo que se tratará de un sistema estable. A partir del margen de fase, obtenemos el coeficiente de amortiguación y la sobreoscilación del sistema:

$$M_f = 72º \rightarrow \xi = 0.85 \rightarrow SO = 0.55\%$$



Con el coeficiente de amortiguación y la frecuencia de corte, obtenemos el tiempo de respuesta:

$$\frac{\omega_c}{\omega_n} = \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2} = 0.5556 \rightarrow \omega_n = \frac{\omega_c}{0.5556} = \frac{4}{0.5556} = 7.1996$$

$$t_r = \frac{\pi}{\xi \omega_n} = 0.5098 \text{ seg}$$

Respecto a la respuesta en régimen permanente, al ser un sistema de tipo 0, tanto el error de velocidad como el error de aceleración serán infinito. En cuanto al error de posición:

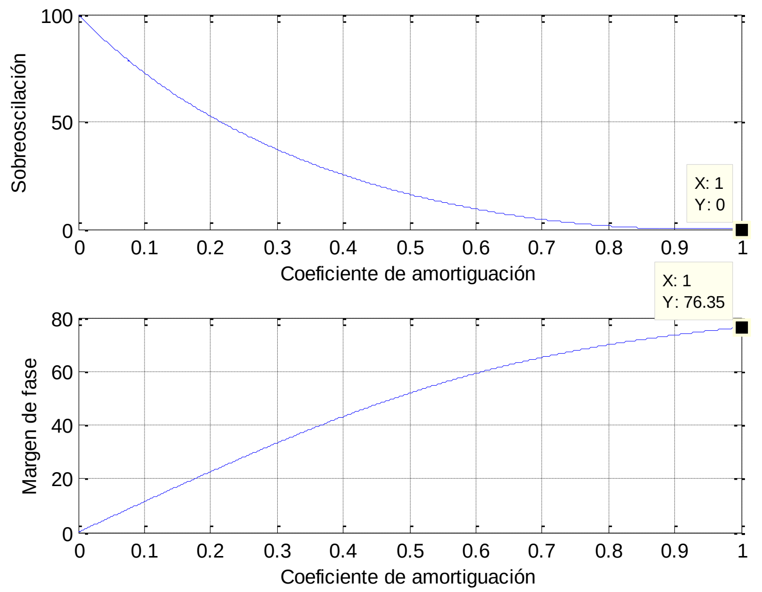
$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 20} = 0.0476$$

e) La respuesta del sistema controlado vendrá caracterizada por los mismos parámetros que en el apartado anterior, pero referidos al sistema controlado.

$$\omega_c = 2, \qquad M_f = 79º, \qquad K_{est} = K_r K = 20 \cdot 0.1 = 2$$

Igual que antes, el margen de fase es positivo, por lo que se tratará de un sistema estable. A partir de éste, obtenemos el coeficiente de amortiguación y la sobreoscilación del sistema:

$$M_f = 79º \rightarrow \xi = 1 \rightarrow SO = 0$$



Con el coeficiente de amortiguación y la frecuencia de corte, obtenemos el tiempo de respuesta:

$$\frac{\omega_c}{\omega_n} = \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2} = 0.4859 \rightarrow \omega_n = \frac{\omega_c}{0.4859} = \frac{2}{0.4859} = 4.1163$$

$$t_r = \frac{4.75}{\omega_n} = 1.1539 \text{ seg}$$

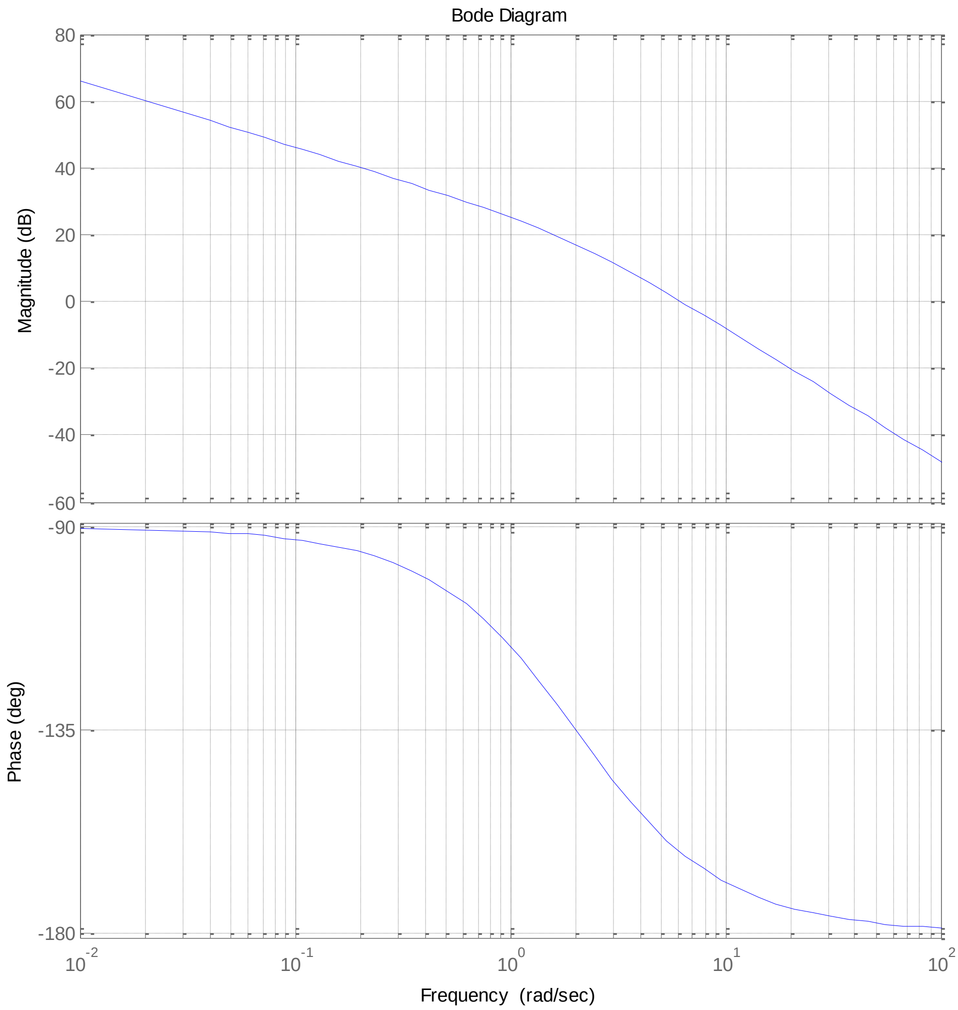
Respecto a la respuesta en régimen permanente, al ser un sistema de tipo 1, el error de posición será nulo y el error de aceleración será infinito. En cuanto al error de velocidad:

$$e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{2} = 0.5$$

EJERCICIO 4

Obtener por métodos frecuenciales el regulador más sencillo para conseguir que el sistema representado por los diagramas de Bode de la hoja adjunta cumpla con las siguientes especificaciones de funcionamiento:

- Error de seguimiento a una rampa unitaria inferior al 1%
- Tiempo de respuesta no superior a 1 segundo
- La respuesta a un escalón no deberá presentar sobrepasamiento



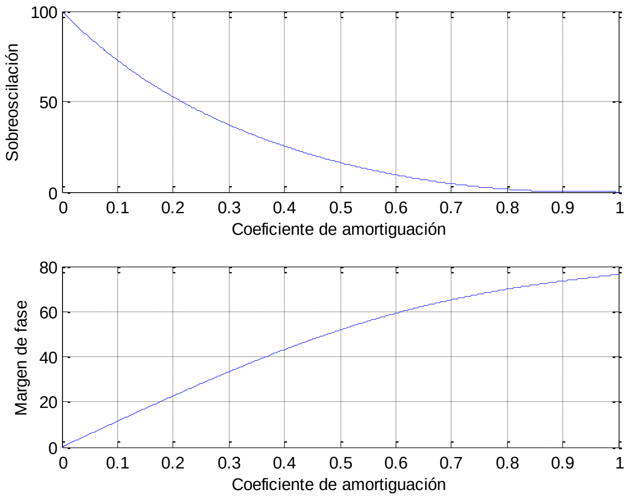
Ejercicio 1. Examen 2º Parcial Julio 29-7-2006

Las especificaciones que tiene que cumplir nuestro sistema son:

- $e_v < 0.01$
- $t_r < 1$
- $SO = 0$

Las especificaciones para la respuesta transitoria se traducen en un margen de fase y una frecuencia de corte determinados. Sobreoscilación nula implica coeficiente de amortiguación unitario y margen de fase superior a 75º.

$$SO = 0 \rightarrow \xi = 1 \rightarrow M_f \geq 75º$$

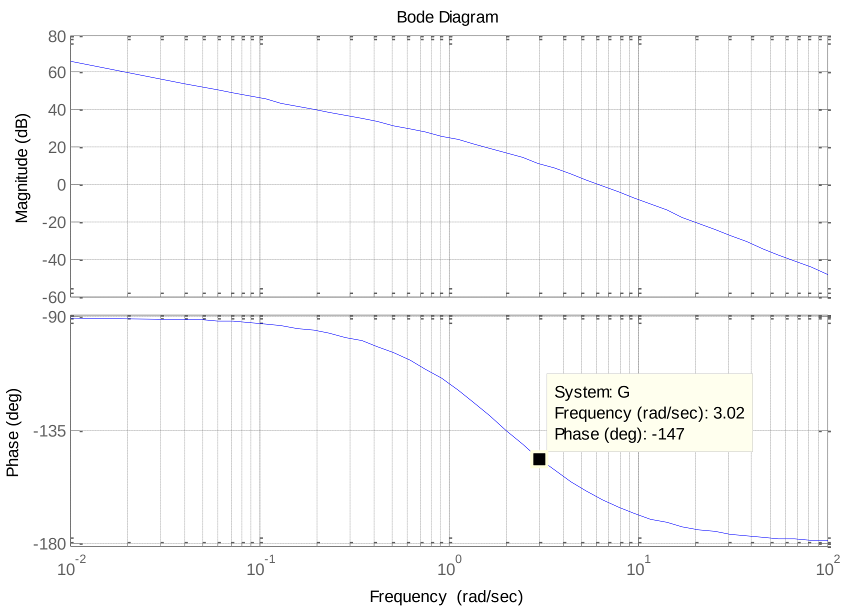


En cuanto al tiempo de respuesta (para sistemas críticamente amortiguados):

$$t_r = \frac{4.75}{\omega_n} \leq 1 \rightarrow \omega_n \geq \frac{4.75}{t_r} = \frac{4.75}{1} = 4.75$$

$$\frac{\omega_c}{\omega_n} = \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2} = 0.4859 \rightarrow \omega_c = 0.4859\omega_n = 0.4859 \cdot 4.75 = 2.3079$$

Si observamos nuestro sistema, vemos que estableciendo la frecuencia de corte deseada en $\omega_c^d = 3$, no tenemos fase suficiente para establecer la condición de sobreoscilación.



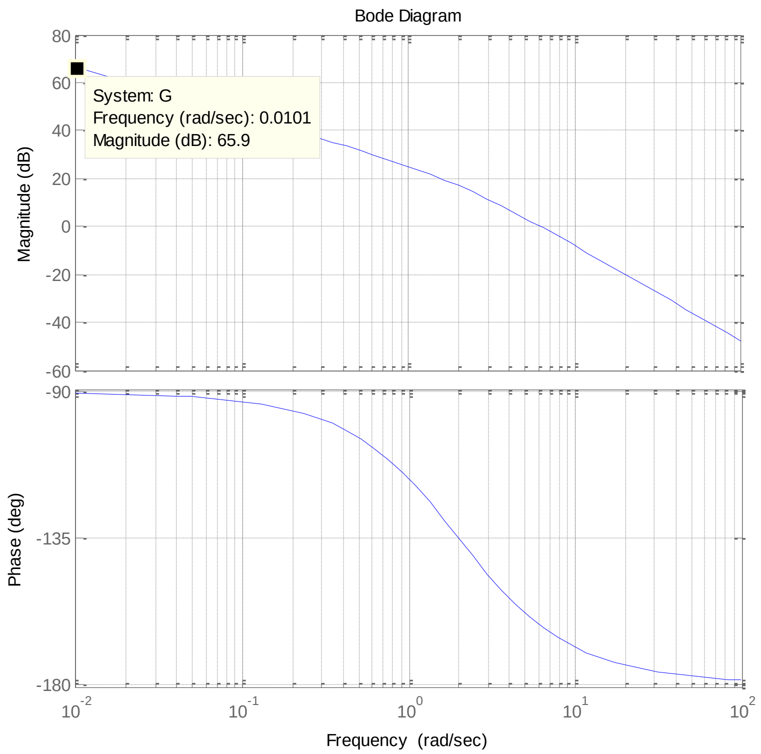
Para poder satisfacer la condición de margen de fase, necesitaremos modificar la curva de fases para aportar la fase necesaria, por lo que deberemos recurrir a un regulador PAF. A la frecuencia de corte deseada, la fase del sistema son -147º, o lo que es lo mismo, tendríamos un margen de fase de 33º, por lo que el aporte de fase necesario será $\phi_{max} = M_f^d - 33 + \varsigma = 75 - 33 + \varsigma = 47º$ (estableciendo un margen de seguridad de 5º). Esto hará que los parámetros del regulador sean:

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_{max}}{1 + \sin \phi_{max}} = 0.1552, \qquad \tau = \frac{1}{\omega_c^d \sqrt{\alpha}} = 0.8462$$

Por otra parte, la condición de régimen permanente para el error de velocidad nos determinará al valor de la ganancia estática del sistema en bucle abierto:

$$e_v = \frac{1}{K_v} \leq 0.01 \rightarrow K_v \geq \frac{1}{0.01} = 100$$

La ganancia estática será la ganancia del sistema multiplicada por la ganancia del regulador, por lo que hemos de identificar la ganancia estática del sistema. Si tomamos el módulo del sistema a bajas frecuencias, por ejemplo a $\omega = 0.01$, al tratarse de un sistema de tipo uno tendremos que:



$$20 \log|G(j\omega_0)| = 20 \log K - 20 \log \omega_0 = 20 \log K - 20 \log 0.01 = 20 \log K + 40 = 66 \text{ dB}$$
$$\rightarrow 20 \log K = 66 - 40 = 26 \rightarrow K = 10^{\frac{26}{20}} = 19.95 \approx 20$$

La condición de régimen permanente impone que la ganancia del sistema sea:

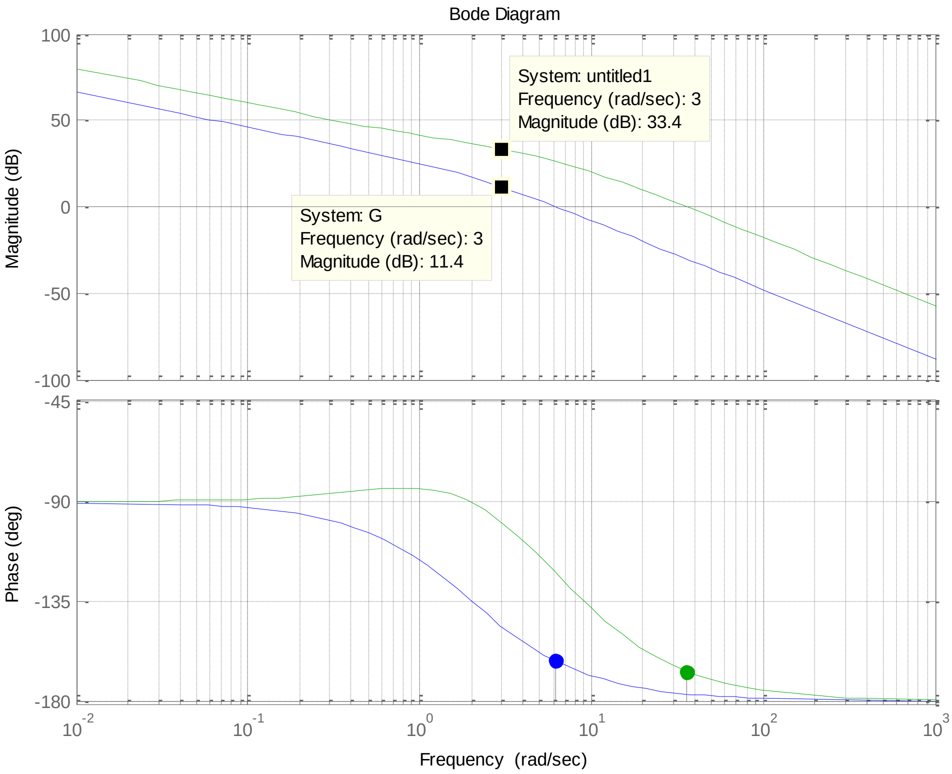
$$K_{est} = K K_r \geq 100 \rightarrow K_r \geq \frac{100}{K} = \frac{100}{20} = 5$$

Cumpliendo la condición de régimen permanente, el regulador de momento deberá ser:

$$R(s) = K_r \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} = 5\frac{1+0.8462s}{1+0.1313s}$$

De momento hemos ajustado el regulador para obtener la fase deseada a la frecuencia deseada, pero aún no hemos ajustado el módulo para establecer la frecuencia de corte. Si vemos el efecto del regulador sobre el sistema, tenemos que a la frecuencia de corte deseada, el módulo será:

$$20\log\left|G\left(j\omega_c^d\right)\right| + 20\log K_r + 10\log\frac{1}{\alpha} = 11.4 + 20\log 5 + 10\log\frac{1}{0.1552}$$
$$= 11.4 + 13.9794 + 8.0920 = 33.4714 \text{ dB}$$



Puesto que la ganancia del regulador está limitada por la condición de error de velocidad, el exceso de módulo para hacer coincidir la frecuencia de corte con la frecuencia de corte deseada debemos compensarlo con un regulador RF.

$$PRF = \frac{1+\alpha'\tau' s}{1+\tau' s}$$

El módulo que debemos restar nos determina el valor del parámetro α del PRF:

$$20\log\frac{1}{\alpha'} = -20\log\alpha' = 33.4714 \rightarrow \alpha' = 10^{-\frac{33.4714}{20}} = 0.0212$$

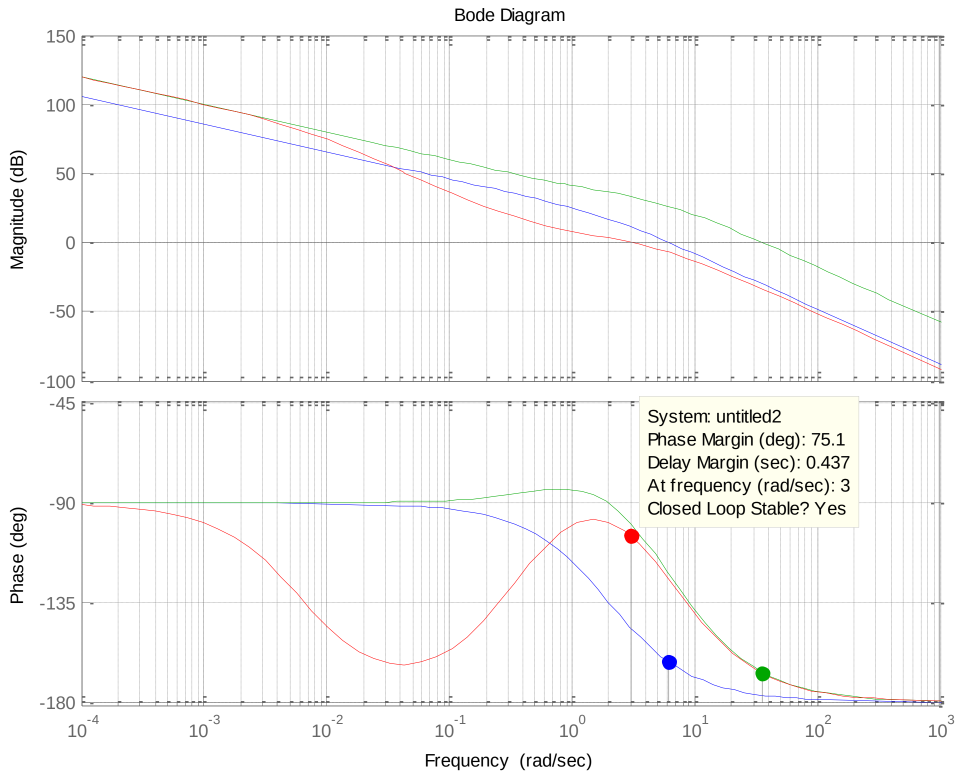
La constante de tiempo del regulador se elige de forma que la frecuencia de transición del cero este una década por debajo de la frecuencia de corte deseada:

$$\frac{1}{\alpha'\tau'} = \frac{\omega_c^d}{10} \rightarrow \tau' = \frac{10}{\alpha'\omega_c^d} = \frac{10}{0.0212 \cdot 3} = 157.1995$$

De esta forma, el regulador completo será:

$$R(s) = K_r \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \frac{1 + \alpha'\tau' s}{1 + \tau' s} = 5 \frac{1 + 0.8462s}{1 + 0.1313s} \frac{1 + 3.333s}{1 + 157.2s}$$

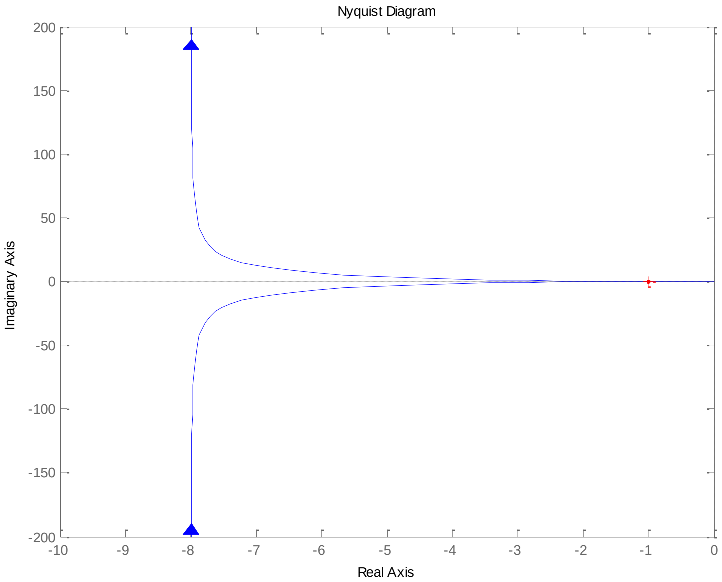
El diagrama de bode con el regulador completo nos queda:

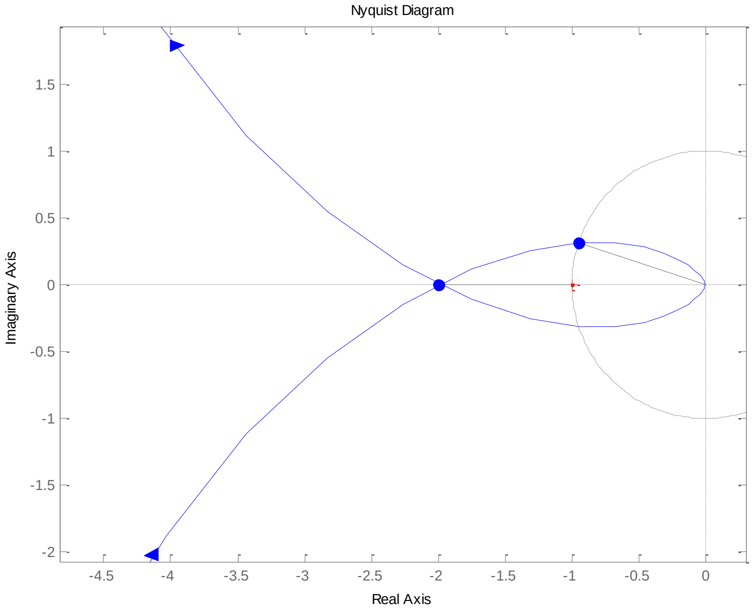


EJERCICIO 5

Los diagramas mostrados en la hoja adjunta representan el diagrama polar y su reflejo especular según el eje de abscisas de un sistema de tipo 1, así como una ampliación del mismo en torno al punto crítico. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Representa gráficamente los márgenes de ganancia y de fase. Estima un valor numérico aproximado de los mismos
b) El sistema, ¿es estable en bucle cerrado? ¿Y en bucle abierto? Justifica tu respuesta
c) Si introducimos sendos reguladores proporcionales de ganancia 0.2 y 5, ¿cómo afectarán en cada caso a la estabilidad?





Ejercicio 1. Examen 2º Parcial Junio 2-6-2006

a) El margen de fase es el ángulo que forma el vector que une el origen y el punto de intersección del diagrama polar con el círculo de radio unidad con el semieje real negativo, en este caso aproximadamente -20º. El margen de ganancia es el inverso de la distancia al eje imaginario del punto de corte de la curva con el eje real:

$$M_g = \frac{1}{2} = 0.5 \rightarrow 20 \log 0.5 = -6 \text{ dB}$$

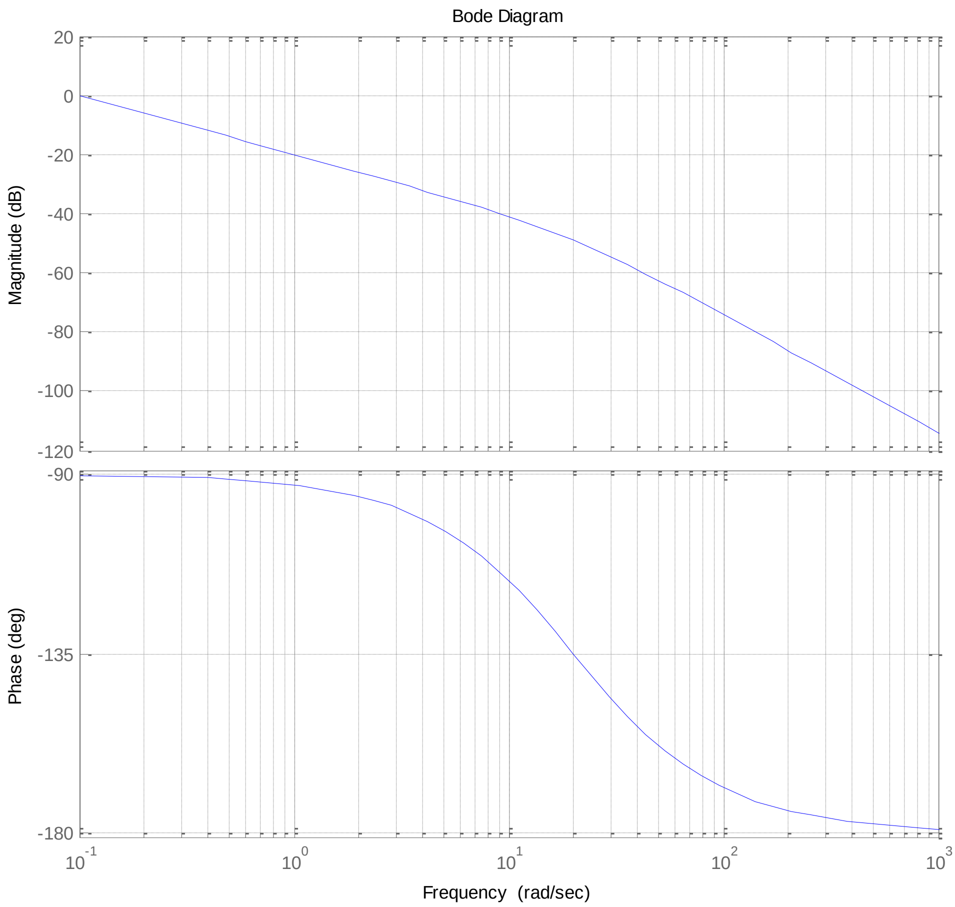
b) El diagrama polar no nos aporta información sobre la estabilidad del sistema en bucle abierto, aunque sabemos que el sistema es de tipo 1, luego será marginalmente estable en bucle abierto. En cuanto a la respuesta en bucle cerrado, vemos que el punto crítico queda a la derecha del punto de corte con el eje real, luego la traza de Nyquist estará dando dos vueltas en torno al punto crítico, y el sistema será inestable. El margen de ganancia menor que uno, y el margen de fase negativo nos dan la misma información

c) El margen de ganancia nos determina en qué magnitud podemos alterar la ganancia de un sistema antes de que se vuelva inestable, en el caso de sistemas estables, o para estabilizarlo, en el caso de sistemas inestables. En nuestro caso, se trata de un sistema inestable, y un margen de ganancia de 0.5 indica que hemos de dividir por 2 la ganancia estática para que el sistema se vuelva estable. Anteponer un regulador proporcional de ganancia 0.2, divide la ganancia estática por 5, lo cual hará que el sistema entre en la zona de estabilidad. Si por el contrario anteponemos un regulador de ganancia 5, todavía aumentaremos más la ganancia estática del sistema, con lo que haremos que éste se aleje aún más de la zona de estabilidad.

EJERCICIO 6

Los diagramas mostrados en la hoja adjunta representan el modelo de un sistema que se pretende controlar. Diseñar mediante técnicas frecuenciales, el regulador más sencillo que permita cumplir las siguientes especificaciones de funcionamiento:

- Error de seguimiento en régimen permanente ante una referencia en rampa unitaria inferior a 0.5
- Sobreoscilación nula
- Tiempo de respuesta inferior a 0.5 segundos



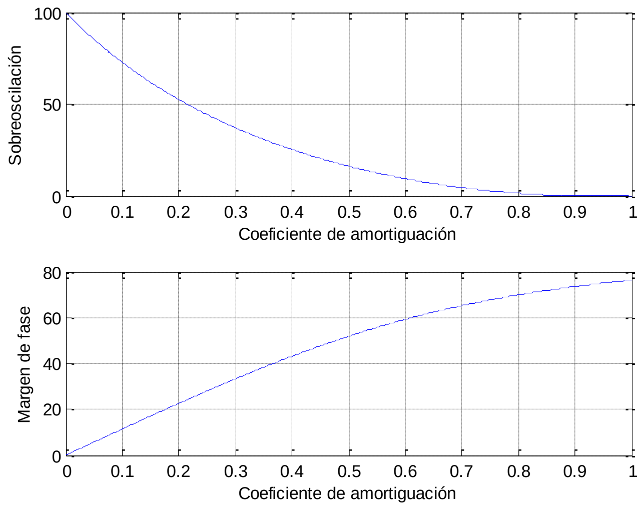
Ejercicio 2. Examen 2º Parcial Junio 2-6-2006

Las especificaciones que tiene que cumplir nuestro sistema son:

- $e_v < 0.5$
- $t_r < 0.5$
- $SO = 0$

Las especificaciones para la respuesta transitoria se traducen en un margen de fase y una frecuencia de corte determinados. Sobreoscilación nula implica coeficiente de amortiguación unitario y margen de fase superior a 75º.

$$SO = 0 \rightarrow \xi = 1 \rightarrow M_f \geq 75º$$

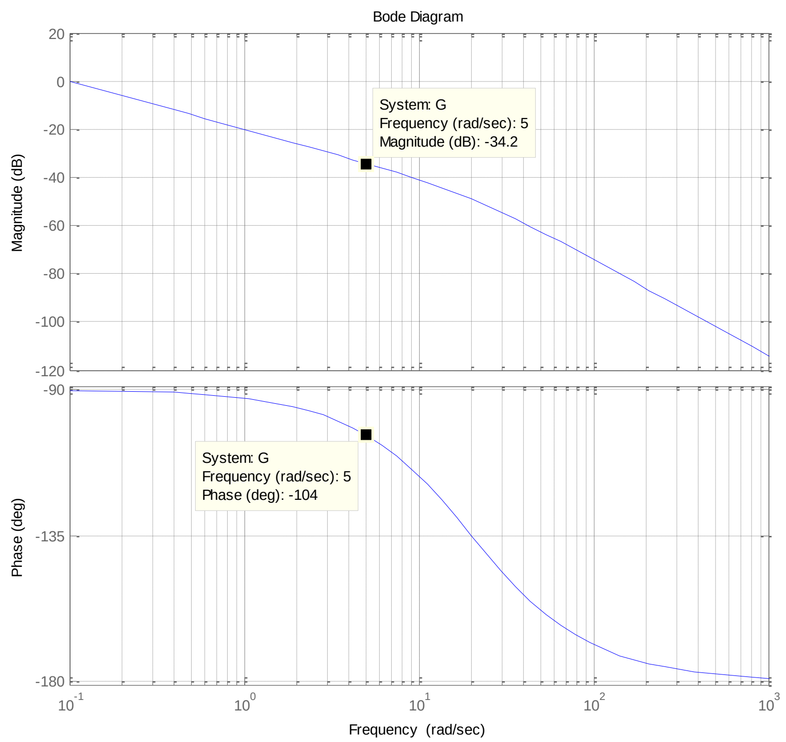


En cuanto al tiempo de respuesta (para sistemas críticamente amortiguados):

$$t_r = \frac{4.75}{\omega_n} \leq 0.5 \rightarrow \omega_n \geq \frac{4.75}{t_r} = \frac{4.75}{0.5} = 9.5$$

$$\frac{\omega_c}{\omega_n} = \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2} = 0.4859 \rightarrow \omega_c = 0.4859\omega_n = 0.4859 \cdot 9.5 = 4.6157$$

Si observamos nuestro sistema, vemos que estableciendo la frecuencia de corte deseada en $\omega_c^d = 5$, tenemos fase suficiente para establecer la condición de sobreoscilación, ya que la fase a esa frecuencia vale -104º, lo cual nos daría un margen de fase $M_f = -104 + 180 = 76º$.



Para establecer la frecuencia de corte a la frecuencia deseada, únicamente deberemos elevar la curva de módulos 34.2 dB:

$$20\log\left|G\left(j\omega_c^d\right)\right| + 20\log K_r = -34.2 + 20\log K_r = 0 \rightarrow 20\log K_r = 34.24 \rightarrow K_r = 10^{\frac{34.24}{20}} = 51.5388$$

La especificación para el error de velocidad, impone un límite inferior para la ganancia. Si este límite queda por debajo del valor calculado, podremos utilizar un regulador proporcional para ajustar las especificaciones. De la condición para el error de velocidad:

$$e_v = \frac{1}{K_v} \leq 0.5 \rightarrow K_v \geq \frac{1}{e_v} = \frac{1}{0.5} = 2$$

La constante de velocidad se compone de la constante del regulador y la ganancia estática del sistema, por lo que hemos de identificar ésta última. Si observamos el módulo a bajas frecuencias:

$$20\log G(j\omega_0) = 20\log K - 20\log \omega_0 = 20\log K - 20\log 0.1 = 20\log K + 20 = 0 \text{ dB}$$
$$\rightarrow 20\log K = -20 \text{ dB} \rightarrow K = 10^{-\frac{20}{20}} = 0.1$$

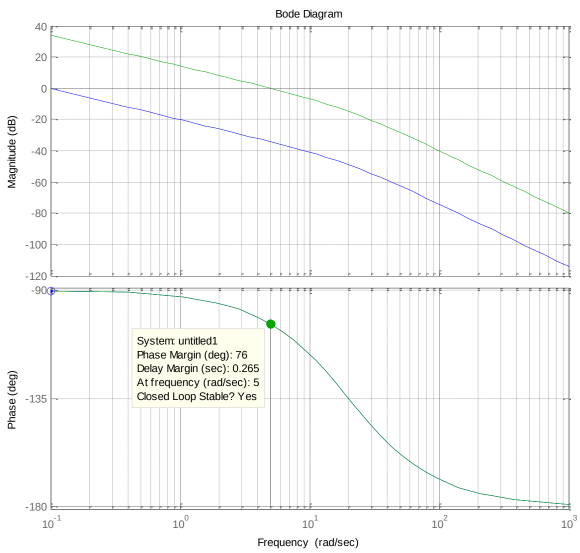
De aquí:

$$K_v = KK_r \geq 2 \rightarrow K_r \geq \frac{2}{K} = \frac{2}{0.1} = 20$$

La ganancia del regulador debe ser mayor que 20 para cumplir la especificación de error de velocidad. Como para ajustar la frecuencia de corte necesitamos una ganancia aún mayor, no tenemos problema ya que el error de velocidad será aún menor que el valor especificado, y podremos utilizar simplemente un regulador proporcional para cumplir las especificaciones:

$$R(s) = K_r = 51.5388$$

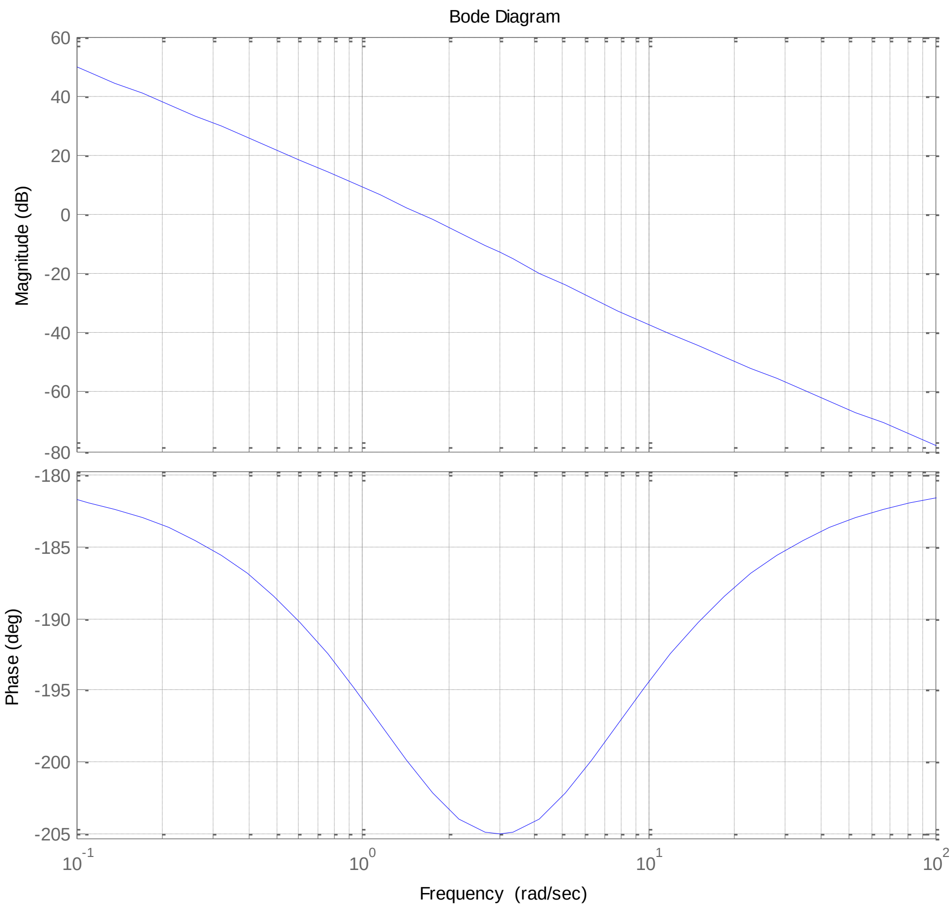
El diagrama de bode del sistema controlado con el regulador proporcional quedaría:



EJERCICIO 7

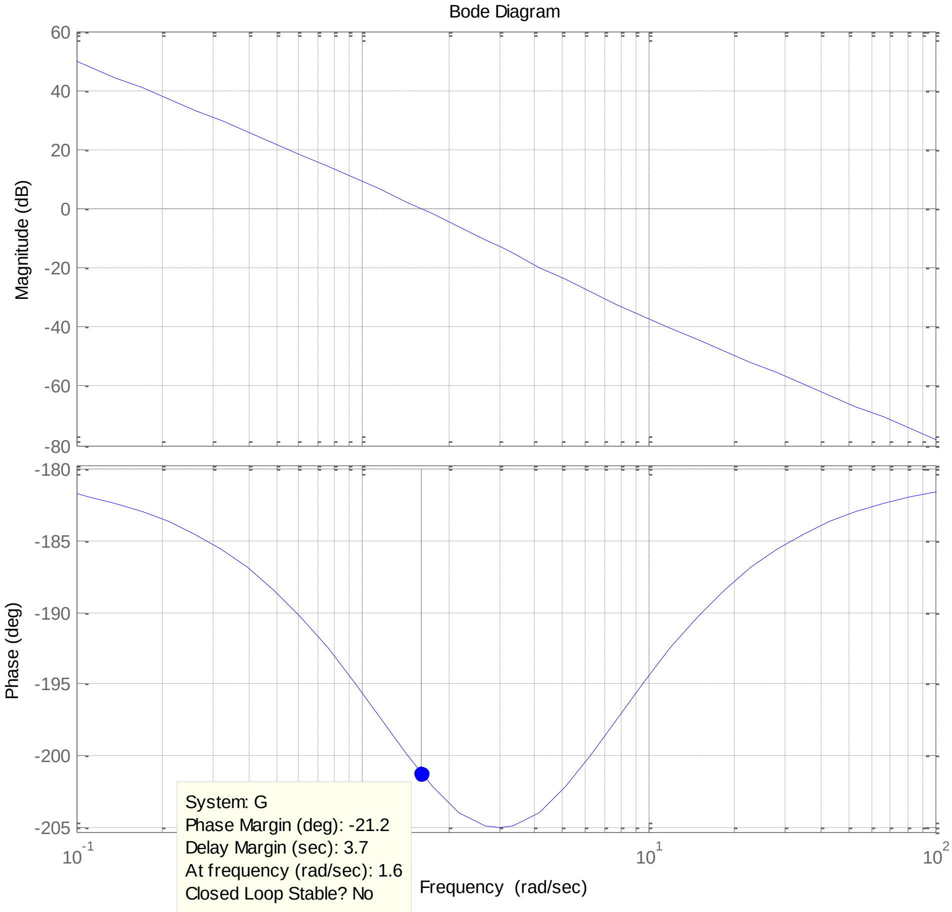
Sea un sistema cuyo modelo frecuencial viene dado por los diagramas mostrados en la hoja adjunta.

a) Define los conceptos de margen de ganancia y margen de fase. Señálalos en la gráfica.
b) El sistema mostrado es inestable en bucle cerrado. Explica el por qué utilizando el criterio de Nyquist.
c) ¿Cuál de los siguientes reguladores estabiliza el sistema? Razónalo en términos frecuenciales
   a. $R(s) = 2.5$
   b. $R(s) = 0.1$
   c. $R(s) = 12.8\frac{1+5.5s}{1+22s}$
   d. $R(s) = 0.06\frac{1+5s}{1+0.15s}$
   e. $R(s) = 0.5\frac{1+s}{s}\frac{1+1.15s}{1+0.85s}$
d) Con el regulador elegido en c), ¿cuál es el tiempo de respuesta y la sobreoscilación del sistema controlado?



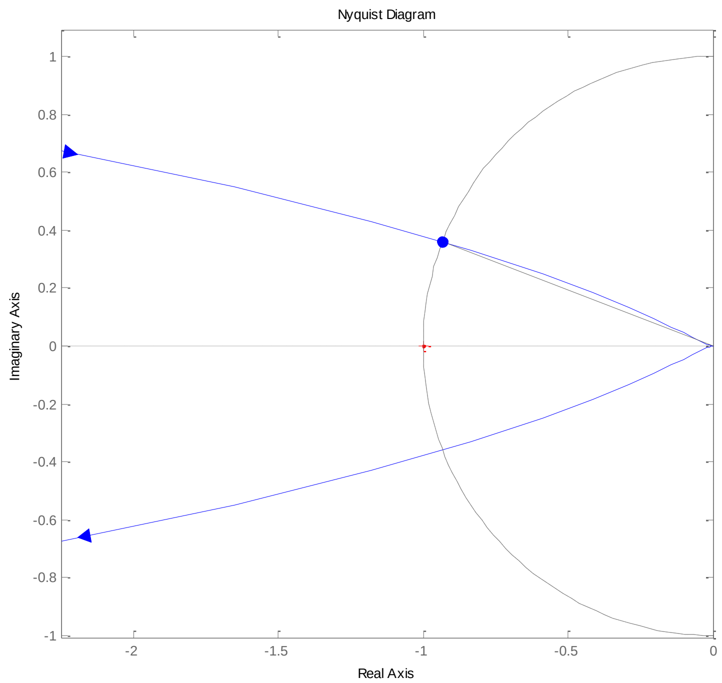
Ejercicio 1. Examen Septiembre (2º Parcial) 17-9-2000

a) El margen de ganancia se define como la ganancia que podemos aplicar al sistema en bucle abierto antes de que se vuelva inestable en bucle cerrado. Se mide en dB como la distancia que entre la curva de módulos y la línea de 0 dB a la frecuencia en la cual la fase vale -180º. En este caso, como la fase siempre está por debajo de -180º, no se puede representar en la gráfica. Esto implica que es imposible estabilizar el sistema únicamente con una ganancia.



El margen de fase se define como el ángulo que debemos girar la traza de Nyquist en torno al origen para que el sistema se vuelva inestable al interceptar ésta al punto crítico. En el diagrama de bode se representa como la distancia en grados entre la fase y la línea de -180º a la frecuencia en la que el módulo vale 0 dB (frecuencia de corte).

b) Al tener un margen de fase negativo, el sistema es inestable. El punto crítico queda encerrado por la taza de Nyquist, que da dos vueltas en torno al punto crítico, por lo que el sistema tiene dos polos con parte real positiva y, por tanto, es inestable.



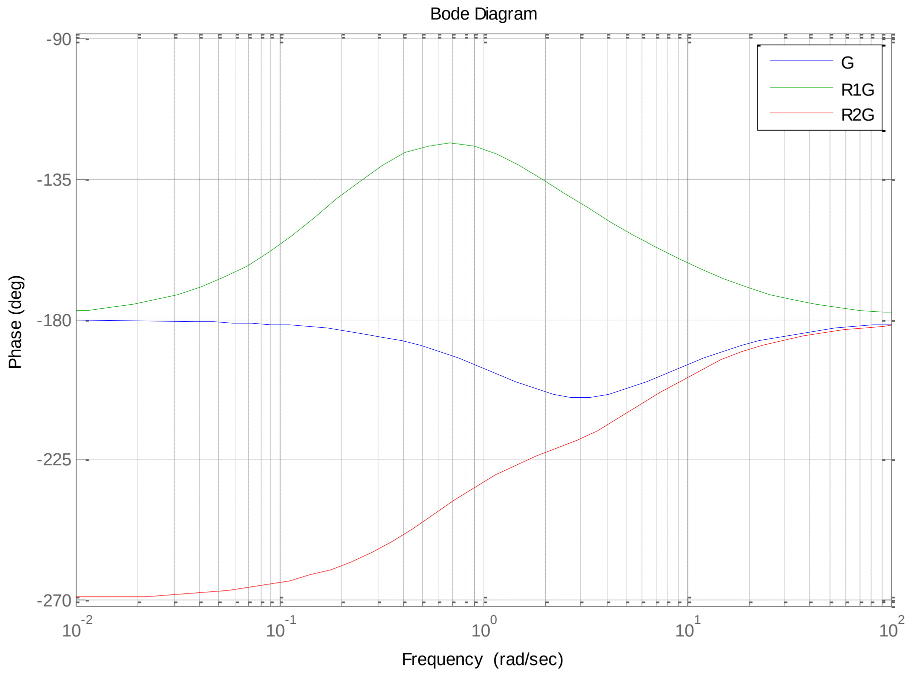
c) Para estabilizar el sistema, necesitamos un regulador que aporte fase, modificando la curva de fases, esto es, un PAF:

$$G(s) = K\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Descartando los reguladores que no siguen esta estructura, sólo nos quedan dos candidatos:

$$R(s) = 0.06\frac{1+5s}{1+0.15s}, \qquad R(s) = 0.5\frac{1+s}{s}\frac{1+1.15s}{1+0.85s}$$

El aporte de fase depende del valor del parámetro α del regulador, cuanto mayor sea este, mayor será el aporte de fase, por lo que se deduce que el primero de los dos tendrá un aporte mayor de fase. Además, el PI del segundo regulador también restará fase hasta $\omega = 10\,\mathrm{rad/seg}$ (una década por encima de su frecuencia de transición). En la gráfica podemos ver el aporte de fase de los dos reguladores, comprobando que el primero es el único que consigue estabilizar el sistema.



d) El regulador seleccionado se corresponde con un PAF de parámetros:

$$R(s) = 0.06\frac{1+5s}{1+0.15s} = K_r\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} \rightarrow \tau = 5, \qquad \alpha = \frac{0.15}{5} = 0.03, \qquad K_r = 0.06$$

El aporte máximo de fase será:

$$\sin\phi_{max} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0.9417 \rightarrow \phi_{max} = 70.34º$$

Y se producirá a la frecuencia:

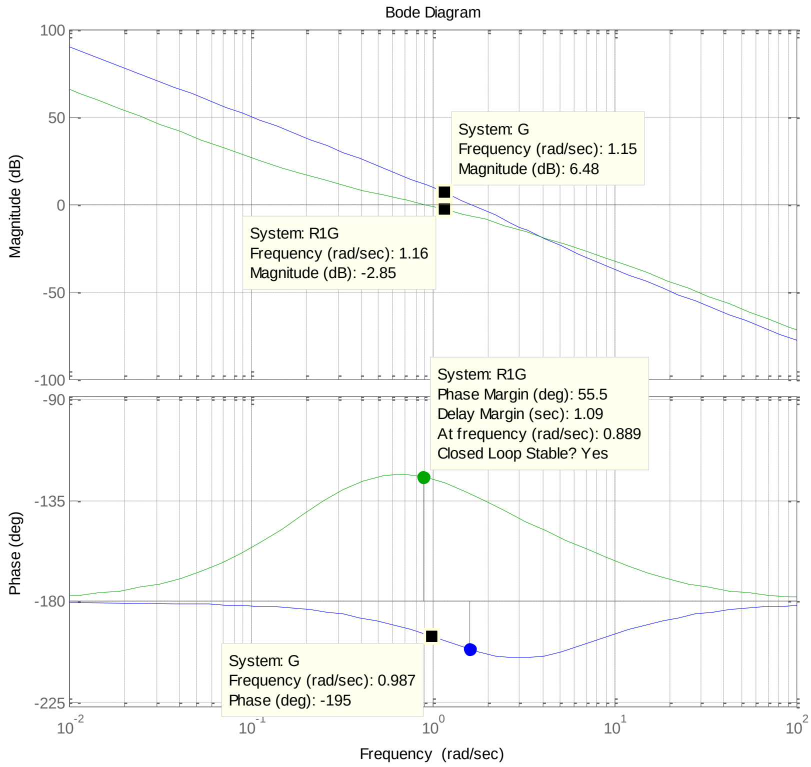
$$\omega_{max} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} = 1.1547$$

Asumiendo que el regulador se ha diseñado para que el aporte máximo se realice a la frecuencia de corte, podemos ver cuál es el valor real del módulo a esa frecuencia:

$$20\log|G(j\omega_{max})| + 20\log K_r + 10\log\frac{1}{\alpha} = 20\log|G(j1.15)| + 20\log 0.06 + 10\log\frac{1}{0.03}$$
$$= 6.4 - 24.43 + 15.22 = -2.8 \text{ dB}$$

La curva de módulos queda ligeramente por debajo de 0 dB, podemos aproximar que la frecuencia de corte sea $\omega_c = 1$ rad/seg, en cuyo caso, el margen de fase sería:

$$M_f \approx \phi_{max} + \left(\theta_{\omega_{max}} + 180\right) = 70º + (-195 + 180) = 55º$$



A partir del margen de fase y la frecuencia de corte, determinamos los parámetros de la respuesta transitoria:

$$M_f = 55^{\circ} \rightarrow \xi = 0.54 \rightarrow SO = 13.32\%$$

$$\frac{\omega_c}{\omega_n} = \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2} = 0.7579 \rightarrow \omega_c = \frac{\omega_c}{0.7579} = \frac{1}{0.7579} = 1.3194$$

$$t_r = \frac{\pi}{\xi\omega_n} = \frac{\pi}{0.45 \cdot 1.3194} = 4.4$$