EJERCICIOS SÍNTESIS DE CONTROLADORES DISCRETOS

EJERCICIO 1

```
COMIENZO
      Siguiente:= Lectura_reloj;
      Periodo:= 0.1;
      BUCLE
            Referencia:= input_ADC(1);
            Posicion:= input_ADC(2);
            Velocidad:= input_ADC(3);
            Accion:= 39.4361*(Referencia - Posicion) - 13.8209*Velocidad;
            output_DAC(Accion);
            Siguiente:= Siguiente + Periodo;
            Esperar(Siguiente – Lectura_reloj);
      FIN_BUCLE;
FIN
```

Las anteriores líneas de programa son la implementación del control de posición de un motor eléctrico cuya función de de transferencia es:

$$G(s) = \frac{0.2}{s(1 + 0.5s)}$$

Se pide:

a) Describe mediante un diagrama de bloques el control realizado. ¿con qué nombre se le conoce?
b) Analiza el comportamiento del motor controlado con el algoritmo presentado.
c) ¿Cuál es la expresión (en el campo transformado correspondiente) de la acción del regulador para el caso de una referencia en escalón de amplitud 3?
d) ¿Cuáles hubiesen sido los valores de las constantes involucradas en la ecuación de control, si con el objetivo de conseguir la dinámica obtenida en b), el regulador hubiese sido calculado con arreglo al método de emulación programada de reguladores continuos?

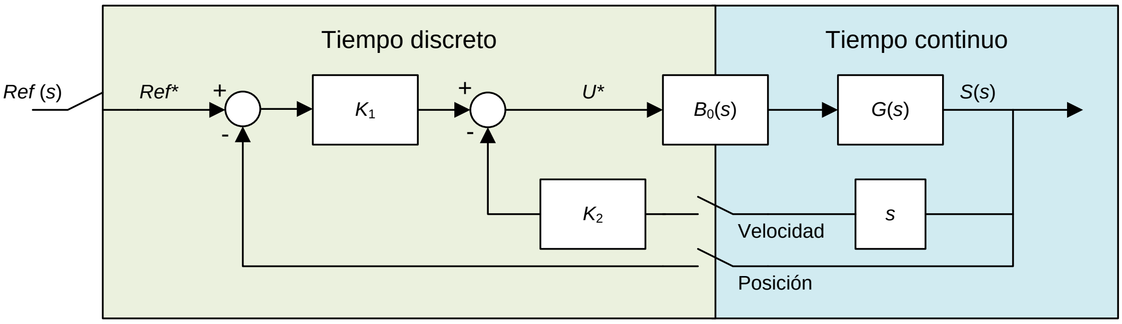
Algunas de las siguientes expresiones pueden resultar útiles:

$$\mathcal{Z}[B_0(s)G(s)s] = \frac{0.036254}{(z - 0.8187)}; \quad \mathcal{Z}[G(s)s] = \frac{0.4z}{(z - 0.8187)}$$

$$\mathcal{Z}[B_0(s)G(s)] = 0.0018731\frac{z + 0.9355}{(z - 1)(z - 0.8187)}; \quad \mathcal{Z}[B_0(s)s] = \frac{z - 1}{z}$$

(Ejercicio 3, 2º parcial 6-6-2007)

a) Según la programación mostrada, La acción es la resultante de comparar la posición con la referencia y multiplicar el error por una constante, para después restarle una medida de la velocidad, multiplicada por una constante, lo cual se conoce como control de posición de doble lazo o servopropulsor, y responde al esquema mostrado en la figura siguiente, con $K_1 = 39.4361$, $K_2 = 13.8209$, y un periodo de muestreo de $T = 0.1$ segundos.



b) Para analizar el comportamiento del motor controlado, necesitamos obtener la función de transferencia en z del sistema total. De las discretizaciones que se nos ofrecen, solo nos son útiles $B_0G(z) = \mathcal{Z}[B_0(s)G(s)]$ y $B_0Gs(z) = \mathcal{Z}[B_0(s)G(s)s]$, que se corresponden con la función de transferencia de la posición y de la velocidad respectivamente en función de la acción del regulador. La función de transferencia completa del sistema viene dada por:

$$F(z) = \frac{K_1B_0G(z)}{1 + K_1B_0G(z) + K_2B_0Gs(z)} = \frac{0.073867\dfrac{z+0.9355}{(z-1)(z-0.8187)}}{1 + 0.073867\dfrac{z+0.9355}{(z-1)(z-0.8187)} + \dfrac{0.50106}{(z-0.8187)}}$$

$$= \frac{0.073867(z+0.9355)}{(z-1)(z-0.8187) + 0.073867(z+0.9355) + 0.50106(z-1)}$$

$$= \frac{0.073867(z+0.9355)}{z^2 - 1.244z + 0.3868}$$

Las raíces de la ecuación característica son:

$$\begin{cases} z_{p1} = 0.6312 \\ z_{p1} = 0.6128 \end{cases} \xrightarrow{s_p = \frac{\ln|z_{p1}|}{T}} \begin{cases} s_{p1} = -4.6 \\ s_{p1} = -4.9 \end{cases}$$

A partir de la ecuación característica:

$$(s - s_{p1})(s - s_{p2}) = s^2 - (s_{p1} + s_{p2})s + s_{p1}s_{p2} = s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2 \rightarrow$$

$$\omega_n = \sqrt{s_{p1}s_{p2}} = 4.7470$$

$$\xi = \frac{-(s_{p1} + sp_2)}{2\sqrt{s_{p1}s_{p2}}} = 1.0005$$

Se trata de un sistema con dos polos reales (por tanto sin sobreoscilación) casi coincidentes, con un coeficiente de amortiguación cercano a la unidad, por lo que podemos aproximar el sistema como con un polo doble coincidente en $s_p = -4.75$, y el tiempo de respuesta vendrá dado por:

$$t_r = \frac{4.75}{\omega_n} = \frac{4.75}{4.75} = 1$$

El sistema continuo tiene un integrador en la cadena directa, por lo que el error de posición será nulo. En cuanto al error de velocidad, este vendrá dado por:

$$e_v = \lim_{z\to1}(z-1)\big(1-F(z)\big)\frac{Tz}{(z-1)^2} = \lim_{z\to1}\left(\frac{z^2-\ 1.3179z+0.3177}{z^2-1.244z+0.3868}\right)\frac{Tz}{z-1}$$
$$= \lim_{z\to1}\frac{(z-1)(z-0.3877)}{z^2-1.244z+0.3868}\frac{Tz}{z-1} = \frac{(1-0.3877)}{1-1.244+0.3868}0.1 = 0.48$$

c) Para la expresión de la acción en función de la entrada, a partir de la función de transferencia:

$$\frac{U(z)}{Ref(z)} = \frac{U(z)}{S(z)}\frac{S(z)}{Ref(z)} = \frac{1}{B_0G(z)}F(z) \to U(z) = \frac{F(z)}{B_0G(z)}Ref(z)$$

Para la entrada escalón de amplitud 3, $Ref(z) = \frac{3z}{z-1}$:

$$U(z) = \frac{\dfrac{0.073867(z+0.9355)}{z^2-1.244z+0.3868}}{0.0018731\dfrac{z+0.9355}{(z-1)(z-0.8187)}}\frac{3z}{z-1}$$
$$= \frac{0.073867(z+0.9355)(z-1)(z-0.8187)}{0.0018731(z+0.9355)(z^2-1.244z+0.3868)}\frac{3z}{z-1}$$
$$= 118.3071\frac{z^2-0.8187z}{z^2-1.244z+0.3868}$$

d) La dinámica del sistema según se ha obtenido en el apartado b era de tiempo de respuesta un segundo y sobreoscilación nula. El diseño del regulador mediante síntesis clásica y muestreo rápido tomaría la función de transferencia del sistema controlado, dada por (se puede intuir claramente a partir de la expresión en z…):

$$F(s) = \frac{K_1G(s)}{1+K_1G(s)+K_2G(s)s} = \frac{K_1\dfrac{0.2}{s(1+0.5s)}}{1+K_1\dfrac{0.2}{s(1+0.5s)}+K_2\dfrac{0.2}{(1+0.5s)}}$$
$$= \frac{0.2K_1}{s(1+0.5s)+0.2K_1+0.2K_2s} = \frac{0.4K_1}{s^2+2(1+0.2K_2)s+0.4K_1}$$

Las condiciones de sobreoscilación nula y tiempo de respuesta 1 segundo imponen que:

$$t_r = 1 = \frac{4.75}{\omega_n} \to \omega_n = 4.75 = \sqrt{0.4K_1} \to K_1 = \ 56.4063$$

$$\xi = 1 \to 2\xi\omega_n = 2(1+0.2K_2) \to 4.75 = 1+0.2K_2 \to K_2 = 18.75$$

Estos valores son superiores a los del sistema actual. El diseño del regulador mediante el método de síntesis directa plantearía un esquema semejante, pero en este caso, partiríamos de los polos en s y calcularíamos el valor de las constantes en el campo transformado z. La dinámica deseada se corresponde con un polo doble en $s_p = -4.75$, por lo que el correspondiente polo en z será:

$$z_p = e^{sT} = e^{-0.475} = 0.6219$$

Esto nos da una ecuación característica en z

$$(z-0.6219)(z-0.6219) = z^2-1.2438z+0.3867$$

Si la comparamos con la que obtendríamos de la función de transferencia del sistema:

$$F(z) = \frac{K_1 B_0 G(z)}{1 + K_1 B_0 G(z) + K_2 B_0 Gs(z)}$$
$$= \frac{0.0018731 K_1 \frac{z + 0.9355}{(z-1)(z-0.8187)}}{1 + 0.0018731 K_1 \frac{z + 0.9355}{(z-1)(z-0.8187)} + \frac{0.036254 K_2}{(z-0.8187)}}$$
$$= \frac{0.0018731 K_1 (z + 0.9355)}{(z-1)(z-0.8187) + 0.0018731 K_1 (z + 0.9355) + 0.036254 K_2 (z-1)}$$
$$= \frac{0.0018731 K_1 (z + 0.9355)}{z^2 + (0.0018731 K_1 + 0.036254 K_2 - 1.8187) z + 0.8187 + 0.0018 K_1 - 0.036254 K_2}$$

Nos queda el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0.0018731 K_1 + 0.036254 K_2 - 1.8187 = -1.2438 \\ 0.8187 + 0.0018 K_1 - 0.036254 K_2 = 0.3867 \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$K_1 = \frac{0.5749 - 0.036254 K_2}{0.0018731} = 306.9244 - 19.3551 K_2$$

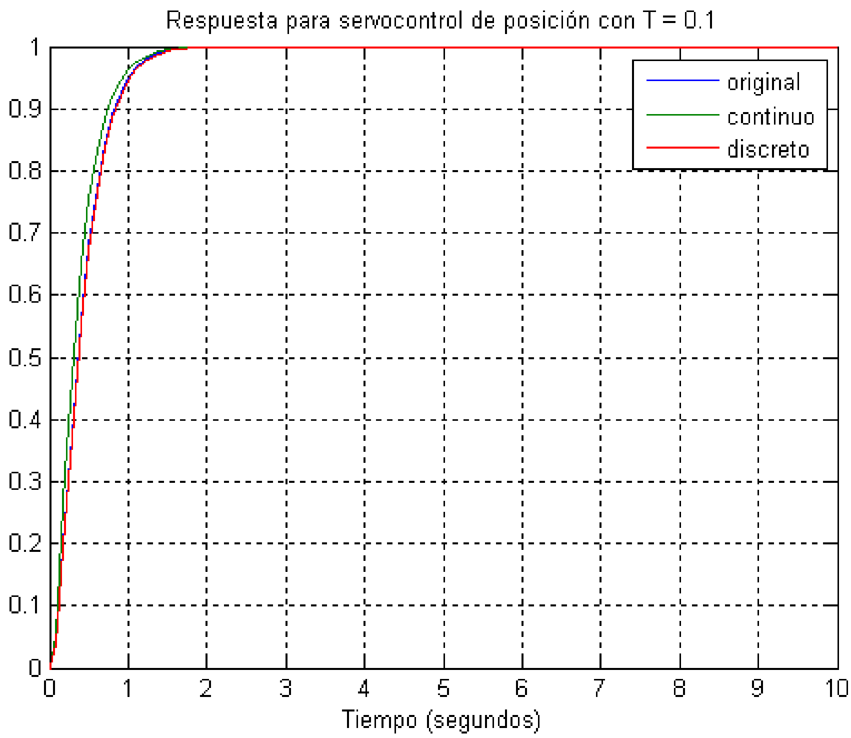
Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$0.8187 + 0.5525 - 0.0348 K_2 - 0.036254 K_2 = 0.3867 \rightarrow K_2 = 13.8467$$

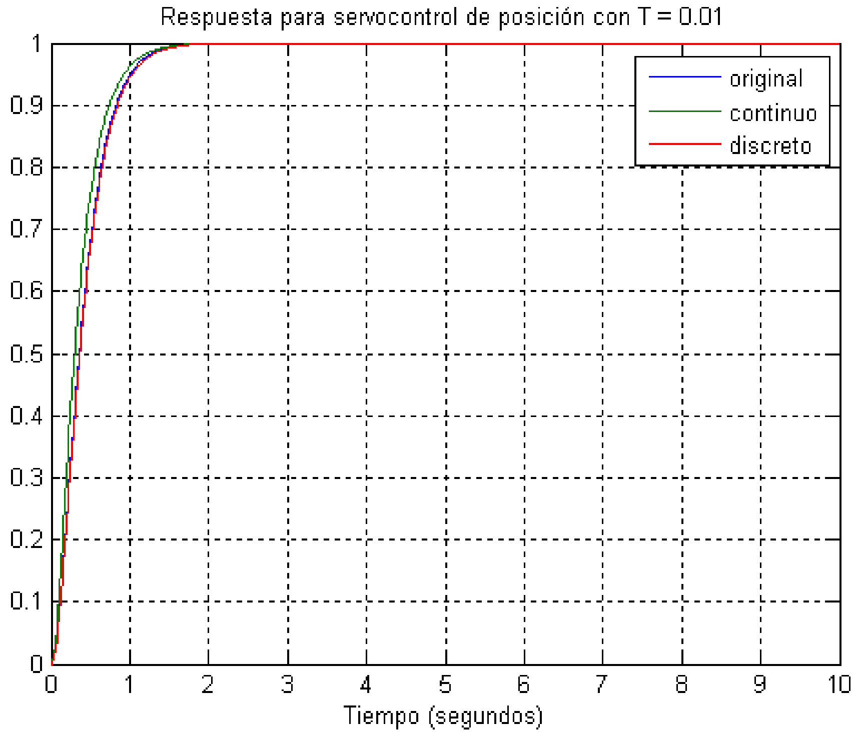
Con lo que:

$$K_1 = 38.9202$$

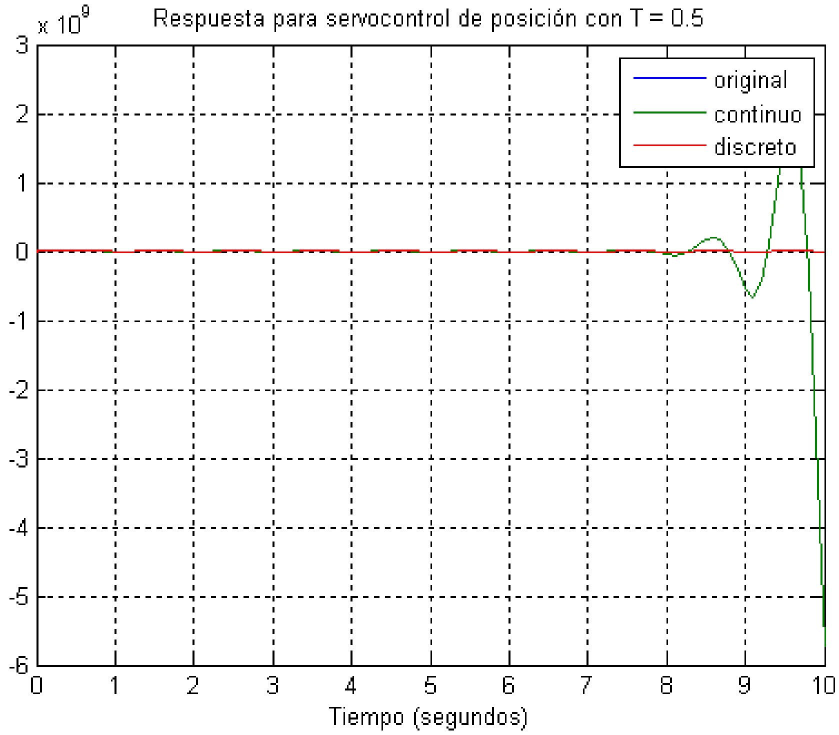
Valores muy similares a los de partida, los cuales no se correspondían con un polo doble sino que había una pequeña desviación, aunque la respuesta no obstante es similar en todos los casos:



Si reducimos el periodo de muestreo apenas se modifica la respuesta:



Mientras que si lo aumentamos, enseguida se vuelve inestable:



EJERCICIO 2

```
COMIENZO
     Error_anterior:= 0
     Siguiente:= Lectura_reloj;
     Periodo:= 0.1;
     BUCLE
          SI Modo_manual_activado Entonces
             Accion:= Leer_accion_manual;
          SI NO
             Referencia:= input_ADC(1);
             Salida:= input_ADC(2);
             Error = Referencia - Salida;
             Accion:= Acción + 1.9771*(Error - 0.9672*Error_anterior);
          FIN_SI;
          output_DAC(Accion);
          Error_anterior:= Error;
          Siguiente:= Siguiente + Periodo;
          Esperar(Siguiente – Lectura_reloj);
     FIN_BUCLE;
FIN
```

Las anteriores líneas de programa son la implementación del control de posición de un motor eléctrico cuya función de de transferencia es:

$$G(s) = \frac{4}{1 + 3s}$$

Se pide:

a) Obtén la función de transferencia del regulador $R(z)$.
b) Analiza el comportamiento sistema controlado mediante el mencionado algoritmo.
c) Si únicamente modificamos la línea en la que se define el periodo, asignándole el valor 0.01, ¿Cuál será ahora la función de transferencia del regulador? Justifica tu respuesta.
d) En las condiciones enunciadas en el apartado anterior, ¿Cuál será ahora el comportamiento del sistema controlado?

(Ejercicio 2, 2º parcial Julio 29-7-2006)

a) Para la función de transferencia del regulador, examinamos la ecuación en diferencias correspondiente a la acción suministrada por el regulador en el modo automático:

$$u_k = u_{k-1} + 1.9771(e_k - 0.9672e_{k-1})$$

De la cual, aplicando la transformada z:

$$U(z) = z^{-1}U(z) + 1.9771\big(E(z) - 0.9672z^{-1}E(z)\big)$$

Obtenemos la expresión del regulador

$$R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1.9771(1 - 0.9672z^{-1})}{1 - z^{-1}} = \frac{1.9771(z - 0.9672)}{z - 1}$$

b) Para analizar el comportamiento del sistema controlado, debemos obtener su función de transferencia, para lo cual en primer lugar hemos de discretizar el sistema a controlar:

$$B_0G(z) = \mathcal{Z}[B_0(s)G(s)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{4}{s(1+3s)}\right] = \frac{z-1}{z} 4\,\mathcal{Z}\left[\frac{1/3}{s(1/3+s)}\right]$$

En las tablas:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{a}{s(s+a)}\right] = \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

Por lo que:

$$B_0G(z) = 4\frac{z-1}{z}\frac{z\left(1-e^{-T/3}\right)}{(z-1)\left(z-e^{-T/3}\right)} = \frac{4\left(1-e^{-T/3}\right)}{z-e^{-T/3}} = 4\frac{0.0328}{z-0.9672}$$

Y

$$R(z)B_0G(z) = \frac{1.9771(z-0.9672)}{z-1} 4\frac{0.0328}{z-0.9672} = \frac{0.2594}{z-1}$$

La función de transferencia del sistema controlado es:

$$F(z) = \frac{R(z)B_0G(z)}{1+R(z)B_0G(z)} = \frac{\frac{0.2594}{z-1}}{1+\frac{0.2594}{z-1}} = \frac{0.2594}{z-0.7406}$$

Se corresponden con un primer orden con polo en $z_p = 0.7406$, por lo que el correspondiente polo en s estará en:

$$s_p = \frac{\ln|z_p|}{T} = -3.0029 \rightarrow \tau = -\frac{1}{3.0029}$$

De aquí, el tiempo de respuesta será:

$$t_r = 3\tau = \frac{3}{3.0029} \approx 1$$

En cuanto al régimen permanente, a partir de la función de transferencia en bucle abierto:

- Error de posición nulo (sistema de tipo 1)
- Error de velocidad

$$e_v = \frac{T}{K_v} = \frac{0.1}{0.2594} = 0.3855$$

$$K_v = \lim_{z\to 1}(z-1)G(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{0.2594}{(z-1)} = 0.2594$$

- Error de aceleración infinito (sistema de tipo 1)

c) El hecho de modificar el periodo de muestreo no afecta a la ecuación en diferencias, por lo que la expresión del regulador será la misma independientemente de cuál sea el periodo de muestreo. Otra cosa es que el regulador haya sido diseñado para un periodo de muestreo específico, y se comporte de la forma esperada.

d) Si modificamos el periodo de muestreo, la expresión del regulador no cambia, pero no ocurre lo mismo con la expresión del sistema discretizado, que en este caso será:

$$B_0G(z) = \frac{4\left(1-e^{-T/3}\right)}{z-e^{-T/3}} = 4\frac{0.0033}{z-0.9967}$$

Y

$$R(z)B_0G(z) = \frac{1.9771(z-0.9672)}{z-1} 4 \frac{0.0033}{z-0.9967} = \frac{0.0263(z-0.9672)}{(z-1)(z-0.9967)}$$

Al cambiar el periodo de muestreo, el regulador, que estaba diseñado para el otro periodo de muestreo, no cancela los polos del sistema, por lo que ahora pasaremos a tener un sistema de segundo orden:

$$F(z) = \frac{R(z)B_0G(z)}{1 + R(z)B_0G(z)} = \frac{0.0263(z-0.9672)}{(z-1)(z-0.9967) + 0.0263(z-0.9672)}$$
$$= \frac{0.0263(z-0.9672)}{z^2 - 1.97z + 0.9712}$$

Los polos de la ecuación característica quedan en:

$$z_p = 0.9852 \pm j0.0254 \rightarrow s_p = \frac{\ln|z_p|}{T} = -1.4611 \pm j3.169$$

La frecuencia natural y el coeficiente de amortiguación serán:

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_p^2} = 3.4896$$

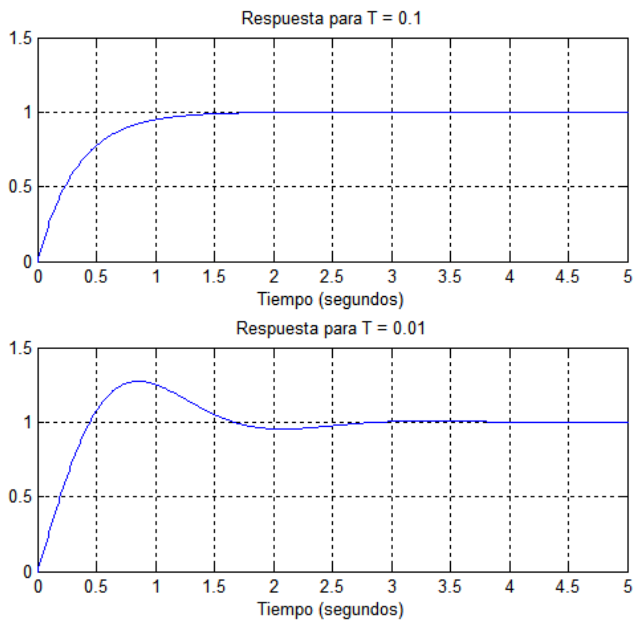
$$\xi = \frac{\sigma}{\omega_n} = 0.4187$$

Con lo que:

$$t_r = \frac{\pi}{\sigma} = 2.15$$

$$SO = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 23.5\%$$

Podemos comparar la respuesta del sistema en ambos casos:



EJERCICIO 3

Se desea llevar a cabo el control por computador (control serie por realimentación) del sistema:

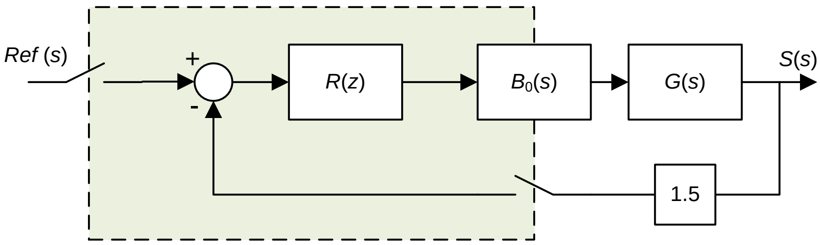
$$G(s) = \frac{0.2(1+s)}{s(1+5s)}$$

La constante del sensor disponible es 1.5. Se pide:

a) Utilizando el método de síntesis directa en z, diseñar el controlador que permita el cumplimiento de las siguiente especificaciones: $e_v \leq 1$; SO $= 0$; $t_r \leq 2$.
b) Escribe el algoritmo de control correspondiente con el regulador obtenido en a), habilitando los modos de operación manual y automático de forma que la transición del modo manual al modo automático se realice sin cambio brusco en la acción.
c) Deduce la primera acción aplicada sobre el sistema que se pretende controlar, así como la acción de régimen permanente, si la referencia es un escalón de amplitud 0.5

(Ejercicio 3, 2º parcial 9-6-2005)

a) El esquema del sistema a controlar es el siguiente:



Como siempre el primer paso es la discretización del sistema. Puesto que el tiempo de respuesta que se pide es de dos segundos, elegiremos un periodo de muestreo de 0.2 segundos. El sistema discretizado será:

$$B_0G(z) = \mathcal{Z}[B_0(s)G(s)] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{0.2(1+s)}{s^2(1+5s)}\right] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{0.2}{s^2(1+5s)} + \frac{0.2}{s(1+5s)}\right]$$

Usando las tablas:

$$B_0G(z) = \frac{z-1}{z}0.2\left(\frac{0.2z}{(z-1)^2} - \frac{z(1-e^{-0.2T})}{0.2(z-1)(z-e^{-0.2T})} + \frac{z(1-e^{-0.2T})}{(z-1)(z-e^{-0.2T})}\right)$$

$$= 0.2\left(\frac{0.2}{z-1} - \frac{1-e^{-0.2T}}{0.2(z-e^{-0.2T})} + \frac{1-e^{-0.2T}}{z-e^{-0.2T}}\right)$$

$$= 0.2\left(\frac{0.2}{z-1} + \left(1-\frac{1}{0.2}\right)\frac{1-e^{-0.2T}}{z-e^{-0.2T}}\right) = \frac{0.04}{z-1} + (0.2-1)\frac{1-e^{-0.2T}}{z-e^{-0.2T}}$$

Finalmente, incluyendo la constante del sensor:

$$B_0G(z)1.5 = 0.012947\frac{z-0.8183}{(z-1)(z-0.9608)}$$

A la vista de la función de transferencia del sistema discretizado, el regulador será, cancelando polos y ceros estables:

$$R(z) = K_R \frac{z - 0.9608}{z - 0.8183}$$

Y la función de transferencia en lazo abierto será:

$$R(z)B_0G(z)1.5 = K_R \frac{z - 0.9608}{z - 0.8183} 0.012947 \frac{z - 0.8183}{(z-1)(z - 0.9608)} = \frac{0.012947K_R}{z - 1}$$

De aquí, la función de transferencia en lazo cerrado será:

$$F(z) = \frac{0.012947K_R}{z - 1 + 0.012947K_R} \rightarrow z_p = 1 - 0.012947K_R$$

La condición de tiempo de respuesta inferior a 2 segundos, impone que:

$$t_r = 3\tau \leq 2 \rightarrow \tau \leq 1.5$$

Esto nos da la condición para el polo en s, y cuál debe ser el correspondiente polo en z:

$$-\infty \leq s_p \leq -1.5 \rightarrow e^{-\infty} \leq z_p \leq e^{-1.5T} \rightarrow 0 \leq 1 - 0.012947K_R \leq 0.7408$$

De aquí:

$$K_R \geq \frac{1 - 0.7408}{0.012947} = 20.0186$$

El sistema presenta un integrador en la cadena directa, por lo que el error de posición será nulo. En cuanto al error de ´velocidad:

$$e_v = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{Tz}{(z-1)^2}\left(1 - F(z)\right) = \lim_{z\to 1}\frac{Tz}{z-1}\left(\frac{z-1}{z - 1 + 0.012947K_R}\right) = \frac{T}{0.012947K_R}$$

Que comprobando con el valor que hemos elegido para la ganancia, nos queda:

$$e_v = \frac{0.2}{0.2592} < 1$$

Por lo que también cumplimos la condición para el error de velocidad con la ganancia obtenida de la condición de tiempo de respuesta.

b) El algoritmo de control, sin referirnos al cambio de modo manual/automático a partir de la expresión del regulador:

$$R(z) = 20.0186 \frac{z - 0.9608}{z - 0.8183}$$

sería:

```
COMIENZO
      Error_anterior:= 0
      Accion:= 0;
      Siguiente:= Lectura_reloj;
      Periodo:= 0.2;
      BUCLE
            Referencia:= input_ADC(1);
```

```
          Salida:= input_ADC(2);
          Error = Referencia - Salida;
          Accion:= 0.8133*Accion + 20.0186*(Error - 0.9608*Error_anterior);
          output_DAC(Accion);
          Error_anterior:= Error;
          Siguiente:= Siguiente + Periodo;
          Esperar(Siguiente - Lectura_reloj);
     FIN_BUCLE;
FIN
```

c) La acción en el instante inicial para una entrada en escalón de amplitud 0.5, directamente a partir del algoritmo programada:

```
Error_anterior:= 0;
Acción:= 0;
Error:= Referencia - Salida; (= 0.5)
Accion:= 0.8133*Accion + 20.0186*(Error - 0.9608*Error_anterior);
```

Con lo que:

```
Accion:= 20.0186*0.5 = 10.0093
```

En régimen permanente, el error de posición es nulo, y es debido al integrador que hay en la función de transferencia, por lo que la acción del regulador debe ser nula. Esto también se deduce de la expresión de la acción programada en el regulador.

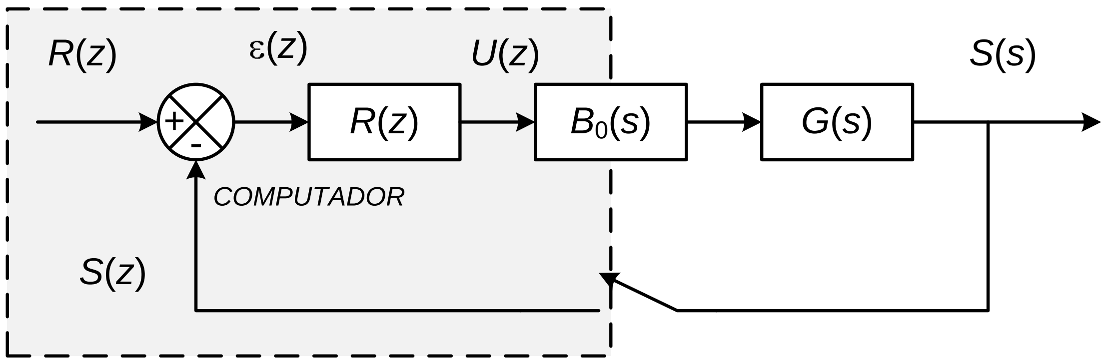
```
Accion:= 0.8133*Accion + 20.0186*(Error - 0.9608*Error_anterior);
```

Tanto el error como el error anterior deben ser nulos, lo que nos deja

```
Accion:= 0.8133*Accion
```

La acción en régimen permanente también debe coincidir con la acción en el instante anterior, lo cual sólo es posible si la acción es nula.

EJERCICIO 4



La figura representa el control por computador del sistema continuo dado por:

$$G(s) = \frac{10}{1+5s}$$

a) Diseña el regulador R(s) que permita cumplir las siguientes especificaciones:
   a. $e_p = 0$
   b. $t_r \leq 1$ segundo
   c. $S.O. = 0\%$
b) Implementa una emulación programada del mismo, utilizando las diferencias hacia atrás como método de discretización del regulador continuo.
c) Demuestra por medios analíticos la bondad de la emulación del regulador continuo realizada en el apartado anterior.
d) Determina la expresión de la acción, ante una referencia escalón de amplitud 2. ¿Cuál es la acción de régimen permanente?
e) Modifica la implementación programada, habilitando los modos de funcionamiento manual y automático, de forma que la transición al modo automático se realice sin golpe

(Ejercicio 2, 2º parcial Junio 16-6-2001)

a) A partir de la función de transferencia del sistema a controlar, y para garantizar error de posición cero, el regulador elegido será del tipo PI:

$$R(s) = K\frac{1+5s}{s}$$

Con lo que la función de transferencia en bucle abierto será:

$$R(s)G(s) = K\frac{1+5s}{s}\frac{10}{1+5s} = K\frac{10}{s}$$

La función de transferencia del sistema controlado con este regulador será un primer orden, por lo que cumpliremos la especificación de sobreoscilación nula:

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)} = \frac{K\frac{10}{s}}{1+K\frac{10}{s}} = \frac{10K}{s+10K} = \frac{1}{1+\frac{s}{10K}}$$

La condición de tiempo de respuesta nos determinará el valor de la ganancia del regulador:

$$t_r = 3\tau = \frac{3}{10K} \leq 1 \rightarrow K \geq 0.3$$

Con lo que el regulador nos quedará:

$$R(s) = 0.3\frac{1+5s}{s}$$

b) La implementación programada del regulador, utilizando diferencias hacia atrás, vendrá dada por la ecuación en diferencias:

$$U(s) = 0.3\left(5+\frac{1}{s}\right)E(s) \rightarrow u(t) = 1.5e(t) + 0.3\int_0^t e(t)dt \rightarrow \begin{cases} u_k = 1.5e_k + 0.3I_k \\ I_k = I_{k-1} + Te_k \end{cases}$$

La expresión en z:

$$I(z) = z^{-1}I(z) + TE(z) \rightarrow I(z) = \frac{T}{1-z^{-1}}E(z)$$

$$U(z) = 1.5E(z) + 0.3I(z) = 0.3\left(5 + \frac{T}{1-z^{-1}}\right)E(z) \rightarrow R(z) = 0.3\left(5 + \frac{T}{1-z^{-1}}\right)$$

A esta misma expresión podríamos haber llegado directamente aplicando el cambio correspondiente a la discretización en diferencias hacia atrás:

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T} \rightarrow \frac{1}{s} = \frac{T}{1-z^{-1}}$$

$$R(s) = 0.3\frac{1+5s}{s} = 0.3\left(\frac{1}{s} + 5\right) \rightarrow R(z) = 0.3\left(5 + \frac{T}{1-z^{-1}}\right)$$

La implementación programada correspondiente al regulador será:

```
COMIENZO
     Integral:= 0
     Accion:= 0;
     Siguiente:= Lectura_reloj;
     Periodo:= 0.02;
     BUCLE
          Referencia:= input_ADC(1);
          Salida:= input_ADC(2);
          Error = Referencia - Salida;
          Integral:= Integral + Periodo*Error;
          Accion:= 1.5*Error + 0.3*Integral;
          output_DAC(Accion);
          Siguiente:= Siguiente + Periodo;
          Esperar(Siguiente – Lectura_reloj);
     FIN_BUCLE;
FIN
```

c) La bondad de la emulación la demostraremos comprobando el comportamiento del sistema controlado. Puesto que la constante de tiempo del sistema a controlar es de 0.2 segundos, elegimos un periodo de muestreo de 0.02 segundos, y obtenemos el sistema equivalente discreto:

$$B_0G(z) = \mathcal{Z}[B_0(s)G(s)] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{10}{s(1+5s)}\right] = 10(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{0.2}{s(0.2+s)}\right]$$

Por tablas,

$$\mathcal{Z}\left[\frac{a}{s(s+a)}\right] = \frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$$

Con lo que:

$$B_0G(z) = 10(1-z^{-1})\frac{(1-e^{-0.2T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-0.2T}z^{-1})} = 10\frac{(1-e^{-0.2T})z^{-1}}{1-e^{-0.2T}z^{-1}} = \frac{0.0399z^{-1}}{1-0.9660z^{-1}}$$

La expresión del regulador, con el periodo de muestreo elegido es:

$$R(z) = 0.3\left(5 + \frac{0.02}{1 - z^{-1}}\right) = 0.3\frac{5.02 - 5z^{-1}}{1 - z^{-1}} = 1.5060\frac{1 - 0.9960z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

La función de transferencia en la cadena directa queda:

$$R(z)B_0G(z) = 1.5060\frac{1 - 0.9960z^{-1}}{1 - z^{-1}}\frac{0.0399z^{-1}}{1 - 0.9660z^{-1}} = \frac{0.0601z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Y la función de transferencia en bucle cerrado:

$$F(z) = \frac{R(z)B_0G(z)}{1 + R(z)B_0G(z)} = \frac{\frac{0.0601z^{-1}}{1 - z^{-1}}}{1 + \frac{0.0601z^{-1}}{1 - z^{-1}}} = \frac{0.0601z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.0601z^{-1}} = \frac{0.0601z^{-1}}{1 - 0.9399z^{-1}}$$

Se trata de un sistema de primer orden básico con un polo en $z_p = 0.9399$, que se corresponde con un polo en $s_p = \frac{\ln|z_p|}{T} = -3.0985$, por lo que el tiempo de respuesta será:

$$t_r = 3\tau = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{3.0985} = 0.9683 \leq 1$$

Las condiciones de sobreoscilación y error de posición se cumplen por la construcción del regulador, por lo que podemos decir que la emulación es correcta.

Si hubiésemos elegido un periodo de muestreo atendiendo únicamente a la dinámica del sistema controlado, para $t_r = 1$ segundo, $T = 0.1$ segundos, en ese caso:

$$B_0G(z) = 10\frac{(1 - e^{-0.2T})z^{-1}}{1 - e^{-0.2T}z^{-1}} = \frac{0.1980z^{-1}}{1 - 0.9802z^{-1}}$$

$$R(z) = 0.3\left(5 + \frac{0.1}{1 - z^{-1}}\right) = 0.3\frac{5.1 - 5z^{-1}}{1 - z^{-1}} = 1.53\frac{1 - 0.9804z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

La función de transferencia en la cadena directa queda:

$$R(z)B_0G(z) = 1.53\frac{1 - 0.9804z^{-1}}{1 - z^{-1}}\frac{0.1980z^{-1}}{1 - 0.9802z^{-1}} = \frac{0.3029(1 - 0.9804z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.9802z^{-1})}$$

Y la función de transferencia en bucle cerrado:

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{R(z)B_0G(z)}{1 + R(z)B_0G(z)} &= \frac{\frac{0.3029(1 - 0.9804z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.9802z^{-1})}}{1 + \frac{0.3029(1 - 0.9804z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.9802z^{-1})}} \\ &= \frac{0.3029(1 - 0.9804z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.9802z^{-1}) + 0.3029(1 - 0.9804z^{-1})z^{-1}} \\ &= \frac{0.3029(1 - 0.9804z^{-1})z^{-1}}{1 - 1.6733z^{-1} + 0.6832z^{-2}} = \frac{0.3029(1 - 0.9804z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.9804z^{-1})(1 - 0.6969z^{-1})} \\ &= \frac{0.3029z^{-1}}{1 - 0.6969z^{-1}} \end{aligned}$$

También se trata de un sistema de primer orden básico con un polo en $z_p = -0.6969$, que se corresponde con un polo en $s_p = \frac{\ln|z_p|}{T} = -3.6113$, por lo que el tiempo de respuesta será:

$$t_r = 3\tau = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{3.6113} = 0.8307 \leq 1$$

En este caso, un periodo de muestreo superior no ha afectado a la bondad de la emulación.

d) La expresión de la acción vendrá dada por:

$$\frac{U(z)}{Ref(z)} = \frac{S(z)}{Ref(z)}\frac{U(z)}{S(z)} = F(z)\frac{1}{B_0G(z)} = \frac{0.0601z^{-1}}{1-0.9399z^{-1}}\frac{1-0.9660z^{-1}}{0.0399z^{-1}}$$
$$= 1.5063\frac{1-0.9660z^{-1}}{1-0.9399z^{-1}}$$

Para la entrada en escalón de amplitud 2:

$$U(z) = 1.5063\frac{1-0.9660z^{-1}}{1-0.9399z^{-1}}Ref(z) = 1.5063\frac{1-0.9660z^{-1}}{1-0.9399z^{-1}}\frac{2}{1-z^{-1}}$$
$$= \frac{3.0125(1-0.9660z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.9399z^{-1})} = \frac{3.0125(z^2-0.9660z)}{(z-1)(z-0.9399)}$$

Descomponiendo la expresión en fracciones simples:

$$\frac{U(z)}{z} = \frac{3.0125(z-0.9660)}{(z-1)(z-0.9399)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.9399}$$
$$= (z-1)\frac{U(z)}{z}\bigg]_{z=1}\frac{1}{z-1} + (z-0.9399)\frac{U(z)}{z}\bigg]_{z=0.9399}\frac{1}{z-0.9399}$$
$$= \frac{1.7043}{z-1} + \frac{1.3083}{z-0.9399}$$

Con lo que:

$$U(z) = 1.7043\frac{z}{z-1} + 1.3083\frac{z}{z-0.9399}$$

Aplicando la transformada inversa, obtenemos:

$$\{u_k\} = 1.7043\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] + 1.3083\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-0.9399}\right]$$
$$= 1.7043\mathcal{Z}^{-1}\{1^k\} + 1.3083\{0.9399^k\} = \{1.7043 + 1.3083 \cdot 0.9399^k\}$$

El valor en régimen permanente será:

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} 1.7043 + 1.3083 \cdot 0.9399^k = 1.7043$$

A este resultado también podemos llegar aplicando el teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{z\to 1}(z-1)U(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{3.0125(z-0.9660)z}{(z-1)(z-0.9399)} = \frac{3.0125(1-0.9660)}{(1-0.9399)}$$
$$= 1.7043$$